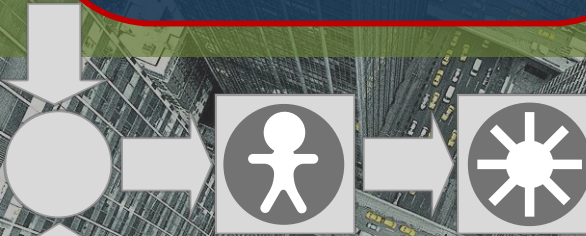


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



А. В. Павлов, О. Ю. Журавльов

НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ  
АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

*Конспект лекцій*



Суми

Сумський державний університет

2016

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ ТА МЕТОДИ ЇХ ОПИСУ .....	7
1.1 Основні типи нелінійних систем та характеристик.....	7
1.2 Особливості математичних моделей нелінійних систем...	13
ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА МАТЕРІАЛОМ РОЗДІЛУ 1.....	18
2 ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ФАЗОВОЇ ПЛОЩИНИ.....	22
2.1 Властивості фазових портретів.....	23
2.2 Особливості фазових портретів.....	24
2.3 Побудова фазових портретів.....	27
2.4 Аналіз прямих показників якості перехідних процесів систем за фазовими портретами.....	28
ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА МАТЕРІАЛОМ РОЗДІЛУ 2.....	31
3 МЕТОД ГАРМОНІЧНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ЛАНОК.....	33
ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА МАТЕРІАЛОМ РОЗДІЛУ 3.....	36
4 ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ..	39
4.1 Критерій В. М. Попова.....	39
4.2 Метод А. М. Ляпунова.....	42
ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА МАТЕРІАЛОМ РОЗДІЛУ 4.....	46
5 МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЖИМУ АВТОКОЛИВАНЬ.....	51

5.1	Метод Л. С. Гольдфарба.....	52
5.2	Метод Е. П. Попова.....	55
	ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА МАТЕРІАЛОМ	
	РОЗДІЛУ 5.....	56
6	АНАЛІЗ НЕПРЯМИХ ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ	
	НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО	
	УПРАВЛІННЯ.....	61
	ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА МАТЕРІАЛОМ	
	РОЗДІЛУ 6.....	66
7	ВІБРАЦІЙНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ	
	ЛАНОК.....	68
	ЗАПИТАННЯ І ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗНАННЯ	
	МАТЕРІАЛІВ .....	73
	СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	76

## ВСТУП

До середини двадцятого століття теорія автоматичного управління розвивалася, базуючись на трьох фундаментальних принципах побудови автоматичних систем. Це були принцип управління за відхиленням, принцип управління за збуренням та принцип комбінованого управління. Однак, починаючи з другої половини двадцятого століття, із появою кібернетики, починають інтенсивно розроблятися засоби, які ефективно використовують властивість запам'ятовування інформації у своїй роботі та здатні проводити самостійно досить трудомісткі для людини математичні обчислення. Так з'явилися перші, відносно ефективні, електронні обчислювальні машини, які стали технологічною основою для розроблення та вдосконалення більш потужних та більш продуктивних комп'ютерів і комп'ютерних систем. Із появою комп'ютерів ученим та інженерам стало посильним вирішення таких завдань:

- дослідження та аналіз складних нелінійних систем за допомогою обчислювальних методів;
- розроблення та реалізація ефективних алгоритмів регулювання, що використовують принцип предикції при формуванні керуючих впливів;
- питання формалізації і дослідження лінійних систем з великою кількістю змінних (багатовимірні системи) за допомогою методу змінних стану.

Окремим класом задач, для яких рівень розв'язання підвищився з появою комп'ютерів, стали задачі ідентифікації об'єктів, які без застосування числових методів із використанням «ручних» обчислень розв'язувалися, але не завжди з достатньою ефективністю і точністю.

Підсумовуючи написане вище, можна зазначити, що основними об'єктами вивчення і дослідження для сучасної теорії автоматичного управління стали нелінійні системи зі складними перехідними процесами і можливістю самоорганізації їхніх

внутрішніх параметрів, дискретні інформаційно-управляючі системи та багатовимірні лінійні системи з великою кількістю вихідних змінних. До окремого класу в сучасній теорії автоматичного управління належать завдання точної та ефективної ідентифікації об'єктів системної інженерії.

Основним інструментарієм сучасної теорії автоматичного управління є обчислювальні аналітичні та числові методи, в основу більшої частини яких покладено базові (класичні) підходи до аналізу, синтезу та управління, відомі ще з класичної ТАУ, але які одержали новий розвиток з появою високопродуктивних комп'ютерів, а також зі спрощенням можливості застосування властивості запам'ятовування інформації.

## 1 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО НЕЛІНІЙНІ СИСТЕМИ ТА МЕТОДИ ЇХ ОПИСУ

До нелінійних систем належать усі системи, які не можуть бути описані лінійними диференціальними рівняннями. Практично всі реальні системи є нелінійними або близькими до таких.

### 1.1 Основні типи нелінійних систем і характеристик

Появу цього класу систем у ТАУ можна пояснити тим, що не всі процеси в системах управління можна пояснити за допомогою теорії, що застосовувалася для опису лінійних систем. Часто в процесі функціонування таких систем, проявляються нелінійні ефекти, які, у свою чергу, значно ускладнюють опис системи за допомогою раніше відомої передаточної функції. До таких ефектів у механічних, електромеханічних та інших системах можна віднести гістерезис, сухе тертя, насичення та інші. Тому для проведення певної класифікації відповідних ефектів у ТАУ були введені аналітичні моделі таких нелінійних процесів, які згодом були названі *типовими нелійнностями*. Перелічимо основні типові нелінійності.

1.1.1 *Характеристика із зоною нечутливості.* Така характеристика властива елементам і системам, які мають певну інертність, а проявляється вона в тому, що елемент не дає реакції на вхідний вплив у певному початковому інтервалі значень вхідних сигналів (див. рис. 1.1). Математично таку характеристику можна подати кусково-лінійно:

$$U = \begin{cases} k(E + c), & \text{при } E < -c, \\ 0, & \text{при } -c \leq E \leq c, \\ k(E - c), & \text{при } E > c, \end{cases}$$

де  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , причому зона нечутливості для цієї характеристики становить  $2c$ .

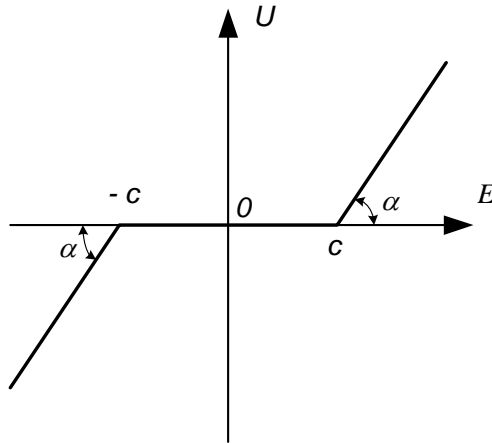


Рисунок 1.1 – Характеристика із зоною нечутливості

**1.1.2 Характеристика із зоною насичення.** Ефект насичення властивий багатьом елементам, які застосовуються в системах управління. До таких ефектів можна віднести магнітне насичення матеріалів, зокрема металів, коли матеріал не може посилювати зовнішнє магнітне поле. Іншим прикладом може бути насичення в телекомунікаційних системах, тобто такий стан, коли якийсь компонент системи досягає максимуму своєї пропускну здатності. Математична модель:

$$U = \begin{cases} -b, & \text{при } E < -c, \\ kE, & \text{при } -c \leq E \leq c, \\ b, & \text{при } E > c, \end{cases}$$

де  $k = \operatorname{tg} \alpha$ .

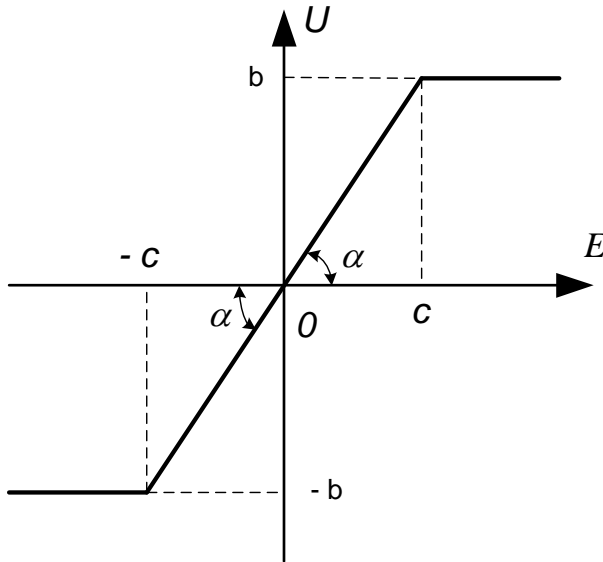


Рисунок 1.2 – Характеристика із зоною насичення

1.1.3 *Релейна характеристика.* Ця характеристика властива більшості елементів релейно-контактних схем і описує стрибкоподібну зміну стану елемента при зміні значення вхідного сигналу. Математична модель:

$$U = \begin{cases} -b, & \text{при } E < -c, \\ b, & \text{при } E > c. \end{cases}$$

Усі перелічені вище характеристики належать до типових *однозначних*, оскільки одному значенню вхідного сигналу, причому незалежно від напрямку його зміни, в такому елементі відповідає єдине значення вихідного сигналу.

Нелінійні характеристики, що являють собою комбінацію декількох найпростіших, називають *комбінованими* нелінійними характеристиками, до яких можна віднести релейну характеристику із зоною нечутливості.



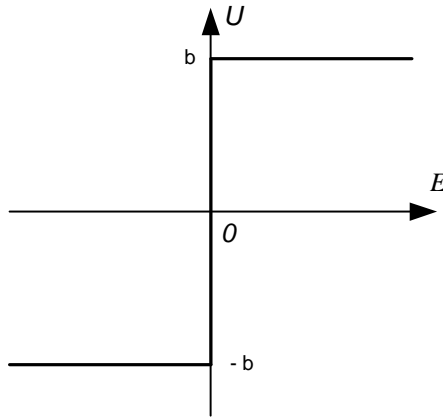


Рисунок 1.3 – Релейна характеристика

1.1.4 *Релейна характеристика із зоною нечутливості.* Ця характеристика становить комбінацію релейної характеристики і характеристики з зоною нечутливості.

Математична модель:

$$U = \begin{cases} -b, & \text{при } E < -c, \\ 0, & \text{при } -c \leq E \leq c, \\ b, & \text{при } E > c. \end{cases}$$

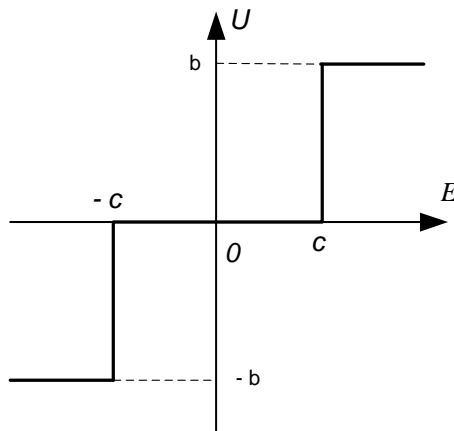


Рисунок 1.4 – Релейна характеристика із зоною нечутливості

Характеристики, в яких значення вихідної величини залежить не лише від значення вхідної, але і від напрямку її зміни, називають *неоднозначними*. До таких характеристик можна віднести характеристику з люфтом або мертвим ходом, а також характеристику реального релейного елемента. Неоднозначності статичних характеристик найчастіше зумовлені різними люфтами у властивостях або параметрах нелінійних ланок або зазорами між їх складовими, тобто, наприклад, при поганому притиску, з'єднанні деталей, що зумовлює стан, коли одна деталь вільно, в невеликих межах рухається в різні боки без зчеплення або контакту з іншою деталлю. Іншим прикладом може бути прояв залишкової намагніченості феромагнетика у разі магнітного гістерезису.

1.1.5 *Характеристика з люфтом або мертвим ходом.* Щоб зрозуміти, як змінюється вихідний сигнал залежно від вхідного в ланці з даною характеристикою, достатньо представити два зубчастих колеса, що перебувають у взаємному зачепленні, при цьому між їхніми зубами нехай є деякий зазор. Обертаючи одне колесо, ми приводимо в обертання інше, проте якщо змінити напрямок обертання першого колеса – зміниться напрямок руху і другого колеса, причому не відразу, а після вибірки відповідного зазору між зубами.

Математична модель:

$$U = \begin{cases} k(E - c), & \text{при } dE/dt > 0, \\ k(E + c), & \text{при } dE/dt < 0, \\ \text{const}, & \text{при } |kE - U| < c. \end{cases}$$

де  $k = \operatorname{tg} \alpha$ .

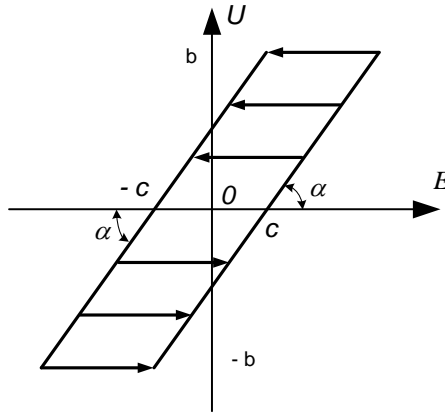


Рисунок 1.5 – Характеристика з люфтом або мертвим ходом

1.1.6 *Реальна релейна характеристика.* Ця характеристика, по суті, являє собою звичайний релейний перехід зі стану в стан, лише із запізненням, викликаним якимось зазором або люфтом у параметрах відповідного нелінійного елемента.

Математична модель:

$$U = \begin{cases} -b, \text{ при } E < c \\ b, \text{ при } E > c \end{cases} \text{ при } \frac{dE}{dt} > 0, \\ \begin{cases} b, \text{ при } E > -c \\ -b, \text{ при } E < -c \end{cases} \text{ при } \frac{dE}{dt} < 0.$$

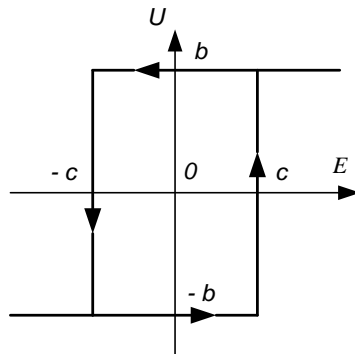


Рисунок 1.6 – Реальна релейна характеристика

Усі перелічені вище нелінійності для спрощення процесу математичного опису з точки зору їх задання аналітично або чисельно були подані кусково-лінійно. Подібним чином кусково-лінійними функціями за допомогою певних спрощень або припущень можна описати математично будь-який реальний нелінійний ефект.

## 1.2 Особливості математичних моделей нелінійних систем

При математичному описі нелінійних систем несуттєві нелінійності лінеаризуються (замінюються на наближені лінійні залежності), а суттєві зводяться до типових нелінійних. Найпростіша нелінійна система управління може бути представлена як сукупність нелінійної ланки і лінійної частини, охоплених від'ємним зворотним зв'язком (див. рис. 1.7).

Більш складні системи завжди можна звести до найпростішого варіанта, об'єднавши за допомогою елементарних перетворень усі лінійні ланки в єдиній лінійній частині. Розглянемо правила перетворення нелінійних ланок у загальне результуюче. Описаний нижче спосіб об'єднання нелінійних ланок у загальну, шляхом побудови результуючих характеристик, надалі будемо називати *методом результуючих характеристик*.

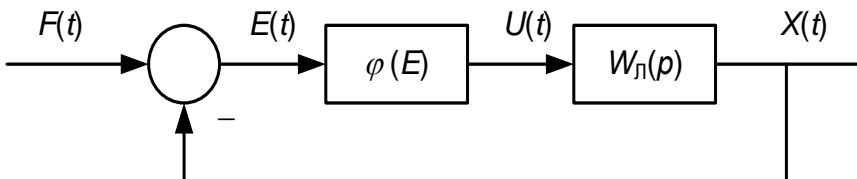


Рисунок 1.7 – Найпростіша модель нелінійної системи управління

1.2.1 *Послідовне з'єднання нелінійних ланок.* Головною особливістю послідовного з'єднання будь-яких ланок є той факт, що вихідний сигнал кожної попередньої ланки, що входить до послідовного з'єднання, є вхідним для наступного (див. рис. 1.8).

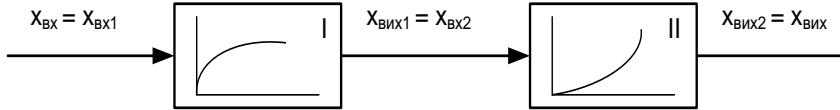


Рисунок 1.8 – Система послідовно з'єднаних нелінійних ланок

Вхідним сигналом усієї системи ланок у цілому є вхід першої ланки системи ланок, а виходом – вихід останньої ланки ланцюга. Враховуючи цю особливість послідовного з'єднання нелінійних ланок, проілюструємо метод одержання результуючої характеристики для випадку двох послідовно з'єднаних елементів (див. рис. 1.9).

У загальній системі координат зображуються характеристики першої та другої нелінійних ланок. Вони повинні бути розташовані одна щодо одної таким чином, що вихідна змінна першої ланки є вхідною для другої, а вихід другої, що визначає вихідний сигнал системи ланок, шляхом лінійного перенесення суміщається із входом системи, що збігається із вхідним сигналом першої нелінійної ланки.

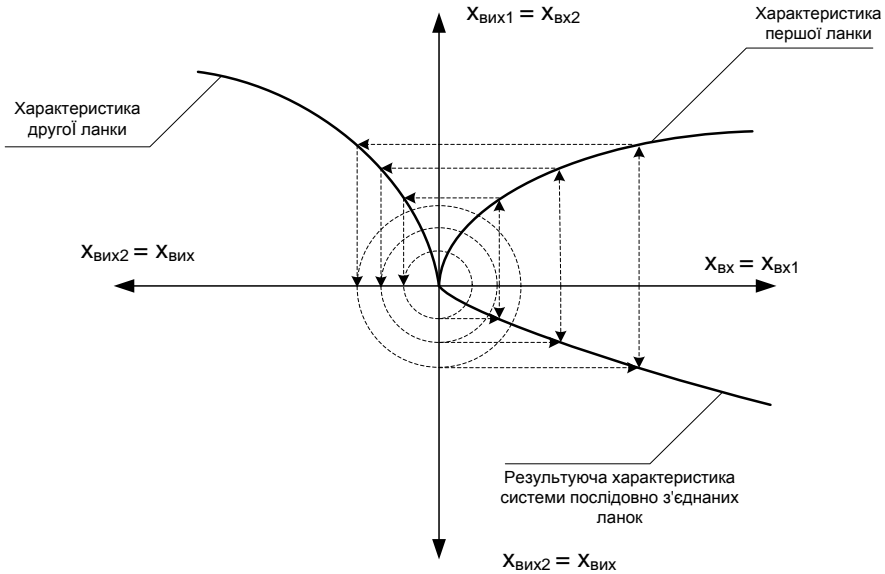


Рисунок 1.9 – Одержання результуючої характеристики системи послідовно з'єднаних нелінійних ланок

**1.2.2 Паралельне з'єднання нелінійних ланок.** Головною особливістю будь-якого паралельного з'єднання ланок у ТАУ є те, що вхідний сигнал системи ланок є одночасно вхідним сигналом для кожної з ланок, яка входить до паралельного з'єднання. Результатом проходження сигналу через систему паралельно з'єднаних ланок, зокрема і нелінійних, є сума або різниця (у разі з'єднання через інвертувальні входи суматора) вихідних сигналів елементів системи (див. рис. 1.10).

Результуюча характеристика може бути одержана після побудови в загальній системі координат нелінійних характеристик першої та другої ланок, а потім їх точкового додавання (за наявності інвертувальних входів суматора у з'єднанні – віднімання) за вихідними значеннями (див. рис. 1.11).

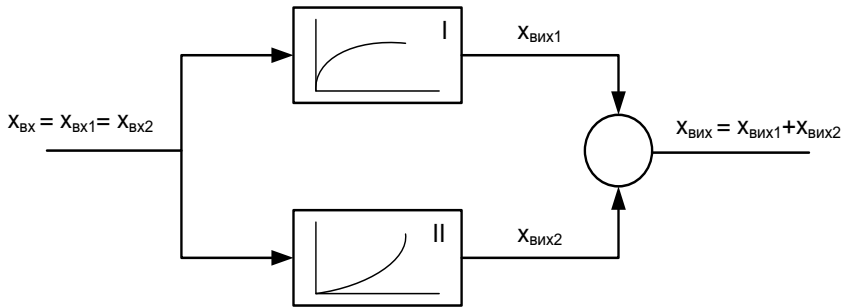


Рисунок 1.10 – Система паралельно з'єднаних нелінійних ланок

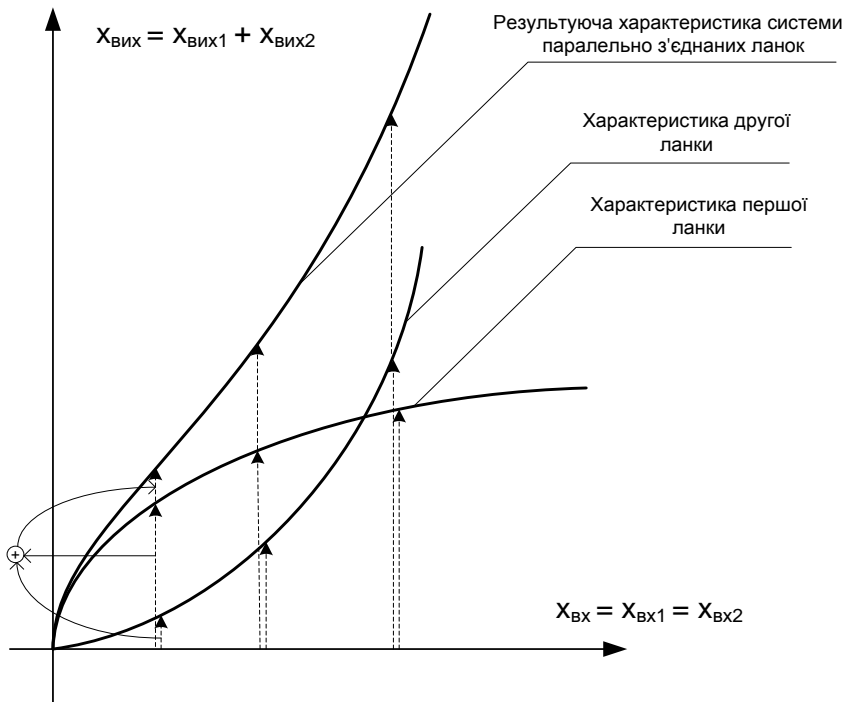


Рисунок 1.11 – Одержання результуючої характеристики системи паралельно з'єднаних нелінійних ланок

1.2.3 *Зустрічно-паралельне з'єднання нелінійних ланок* структурно являє собою ланку, що охоплюється додатним або від'ємним зворотним зв'язком через іншу ланку (див. рис. 1.12). Зустрічно-паралельне з'єднання поєднує в собі властивості послідовного та паралельного з'єднань ланок. Побудова результатуючих характеристик, а відповідно й вибір осей для їх побудови, подібна, певною мірою, до раніше описаних варіантів з'єднань (див. рис 1.13).

Вихідний сигнал зустрічно-паралельного з'єднання ланок визначається вихідним сигналом першої нелінійної ланки, який, у свою чергу, є входним для другої, причому сигнали в обох ланках йдуть паралельно, хоча і в протилежних напрямках.

Таким чином, будь-яку систему управління, до складу якої входить одна або декілька нелінійних ланок, можна звести до найпростішого варіанта (див. рис. 1.7).

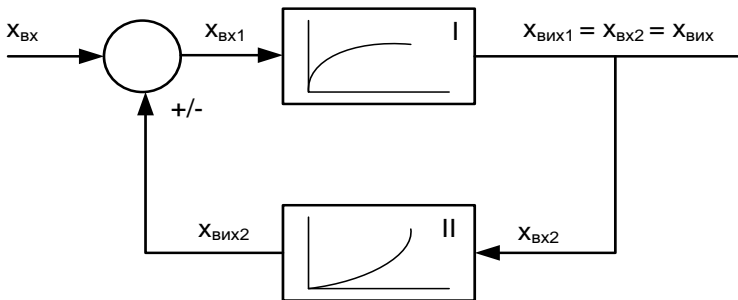


Рисунок 1.12 – Система нелінійних ланок, з'єднаних зустрічно-паралельно



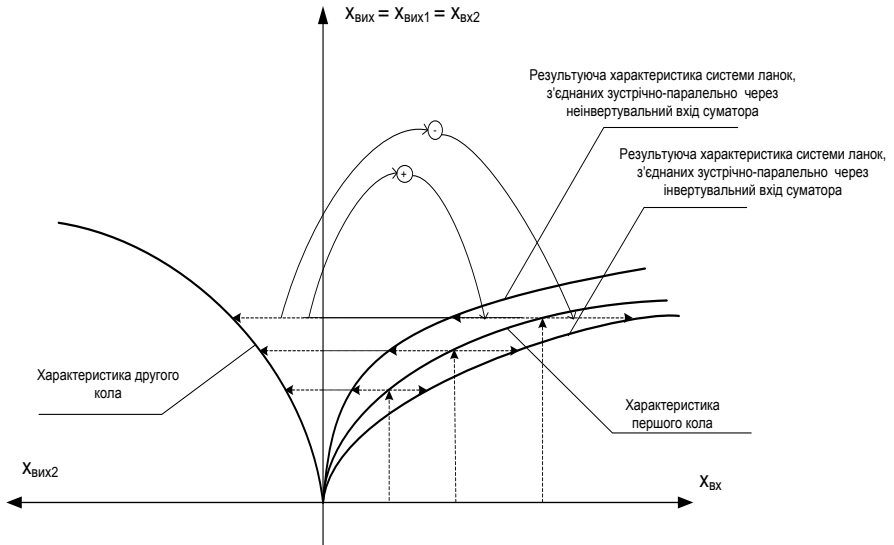


Рисунок 1.13 – Одержання результуючої характеристики системи нелінійних ланок, з'єднаних зустрічно-паралельно

## ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА МАТЕРІАЛОМ РОЗДІЛУ 1

**Умова.** Є система нелінійних ланок, з'єднаних між собою (рис. 1.14):

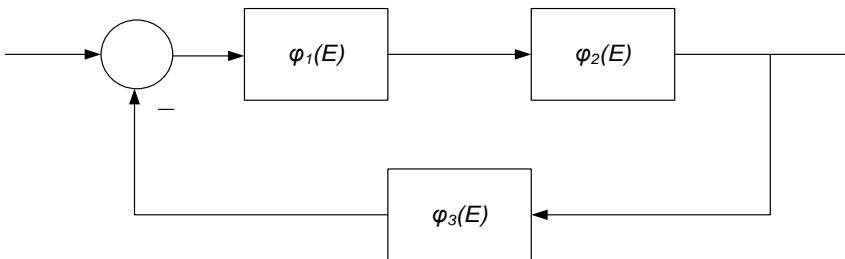


Рисунок 1.14 – Система нелінійних ланок (завдання)

Одержати і побудувати результуючу характеристику даної системи нелінійних ланок, якщо кожна з них окремо має наступні статичні характеристики (рис. 1.15), причому  $c_1 > c_2$ ,  $k = \operatorname{tg} \alpha$ .

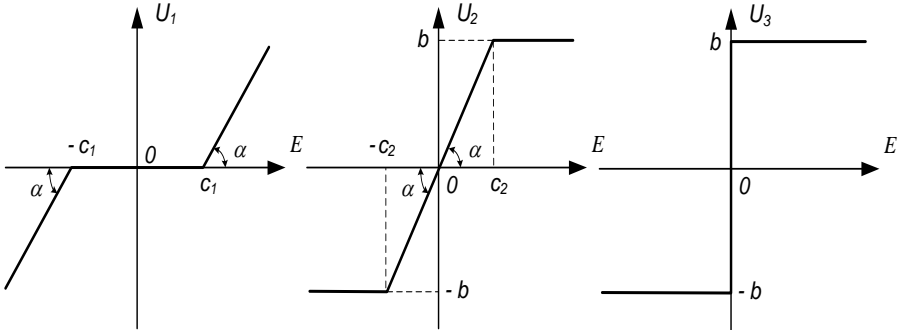


Рисунок 1.15 – Статичні характеристики нелінійних ланок (завдання)

**Розв'язання.** Одержимо результуючу характеристику першої та другої нелінійних ланок з урахуванням того, що вони з'єднані між собою послідовно. Причому внаслідок непарності характеристик (симетричності щодо початку координат) для побудови можна використовувати лише їх додатні частини (рис.1.16):

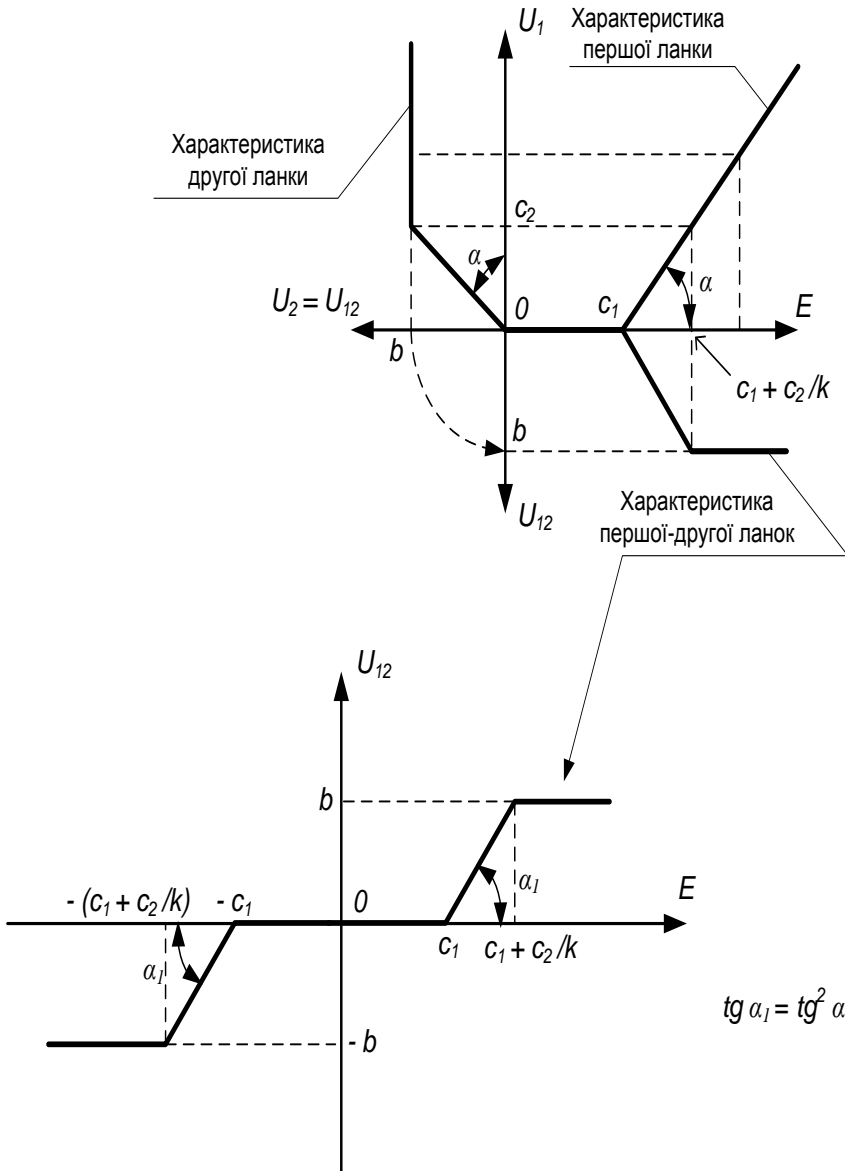


Рисунок 1.16 – Результуюча характеристика першої та другої ланок

Розрахуємо результуючу характеристику всієї сукупності ланок, враховуючи, що перша та друга ланки охоплені від'ємним зворотним зв'язком через третю ланку (рис.1.17).

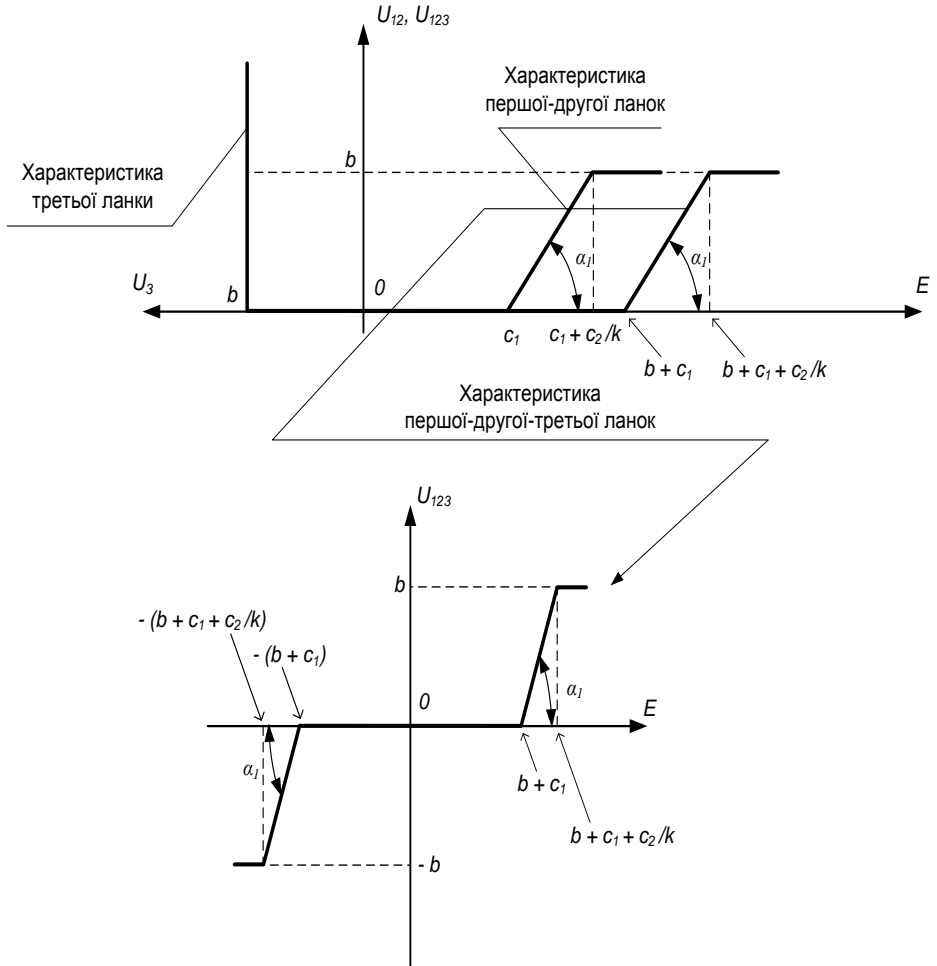


Рисунок 1.17 – Результуюча характеристика всієї сукупності ланок

## 2 ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ФАЗОВОЇ ПЛОЩИНИ

Якщо рух системи можна описати координатами  $x$  та  $y$  за допомогою рівнянь  $dx/dt = f_1(x,y)$  і  $dy/dt = f_2(x,y)$ , то для дослідження такої системи, як правило, зручно зображувати відповідний рух на площині у прямокутній системі координат. Координати  $x$  і  $y$  у цьому випадку називаються *фазовими координатами*, а час  $t$  в явному вигляді у зображення руху не входить. Побічно воно подається так: кожному моменту часу  $t_k$  відповідають фіксовані значення координат  $x(t_k)$  і  $y(t_k)$ , які зображуються в осях  $x$  та  $y$  точкою. При зміні  $t$  зображуюча точка рухається у *фазовій площині*, прокреслюючи на ній лінію, яка називається *фазовою траєкторією*.

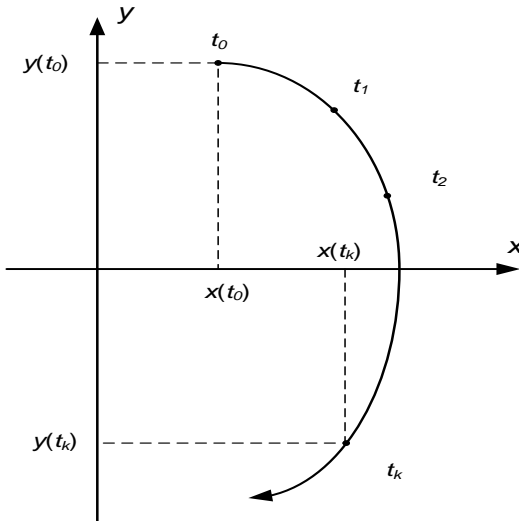


Рисунок 2.1 – Подання часу на фазовій траєкторії

Можна ввести змінну  $t$  в зображення руху і тим самим позначити положення точки в моменти часу  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ .

Зображення всієї сукупності можливих рухів на фазовій площині часто виявляється досить зручним завдяки своїй наочності. Найбільш поширений такий спосіб зображення, при якому використовують дві фазові змінні – основну координату  $x$  і швидкість її зміни  $y$ :

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y). \quad (2.2)$$

Величини являють собою фази руху системи, що й стало підставою введення терміна «фазова площина».

## 2.1 Властивості фазових портретів

Поділивши рівняння (2.2) на (2.1), можна одержати диференціальне рівняння інтегральної кривої у фазовій площині:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{y}. \quad (2.3)$$

Його розв'язання за різних початкових умов дає рівняння кривих у кінцевій формі, зображення яких у сукупності на фазовій площині називається фазовим портретом.

Можна визначити важливі властивості фазового портрета, які необхідно враховувати з метою перевірки правильності відповідних побудов.

1. Якщо  $f(x,y)$  визначені в деякій відкритій області  $R$ , неперервні в цій області і мають неперервні частинні похідні за своїми аргументами, то через будь-яку точку фазової площини, за винятком станів рівноваги (*особливих точок*), в яких одночасно  $y = 0$  та  $f(x,y) = 0$ , проходить єдина інтегральна крива (теорема Коші). Це, зокрема, означає, що фазові траєкторії не перетинаються в неособливих точках подібно до силових ліній

магнітного спектра, що забезпечує наочність картини. Іноді функції  $f(x,y)$  не задовольняють умови Коші (розривні, наявні злами, неоднозначні та ін.), тоді рух досліджують на ділянках, на кожній з яких  $f(x,y)$  задовольняє умови Коші.

2. Оскільки при  $y = dx/dt > 0$  значення  $x$  лише зростає, то у верхній фазовій півплощині при зростанні  $t$  зображувальна точка рухається по фазовій траєкторії зліва направо, а відповідно в нижній – справа наліво. Напрямки руху на фазових траєкторіях прийнято відзначати стрілками.
3. У точках  $y = 0$ ,  $f(x,y) \neq 0$ , тобто неособливих точках осі абсцис, фазові траєкторії перетинають горизонтальну вісь під прямим кутом. Причому зверху вниз у правій та знизу вгору у лівій півплощині фазової площини системи.
4. Значенням  $y = 0$  і  $f(x,y) = 0$ , тобто особливим точкам на осі абсцис, відповідає зупинення руху. Розв'язання рівняння  $f(x,y) = 0$ , якому відповідають  $x = 0$  і  $y = 0$ , є тривіальним розв'язком. У нелінійній системі залежно від виду функції  $f(x, y)$  існує один або безліч розв'язків, частина з яких можуть бути стійкими, а частина – нестійкими. Тому в загальному випадку не можна говорити про стійкість або нестійкість нелінійної системи, можна говорити лише про стійкість або нестійкість її конкретних рухів або станів рівноваги.

## 2.2 Особливості фазових портретів

Згідно з рівнянням (2.3) можливі випадки, коли  $dy/dx = 0/0$ . Такі точки, в яких не існує конкретного напрямку дотичної до фазової траєкторії, називають *особливими точками*.

Якщо результатом руху точки на фазовій площині є замкнена лінія, то ця лінія (яка відповідає сталому руху точки) називається *особливою лінією*. Особливі лінії, що розділяють

якісно різні рухи точок на фазовому портреті, називаються *сепаратрисами*.

Розглянемо більш детально вищезазначені особливості фазових портретів. Згідно з тим, яка рівновага наявна в системі і який вигляд мають фазові траєкторії поблизу особливої точки, ці точки можна класифікувати. Класифікація особливих точок наведена в табл. 2.1.

Якщо у фазовому просторі можлива реалізація якісно різних видів руху, то результатом цього може стати формування так званих особливих ліній, до яких можна віднести граничний стійкий цикл (див. рис. 2.2 а), граничний нестійкий цикл (див. рис. 2.2 б) та сепаратиси (див. рис. 2.2 в). Остання на рисунку формується трійкою особливих точок – центр (точка  $O$ ) та два сідла (точки  $C_1$  і  $C_2$ ).

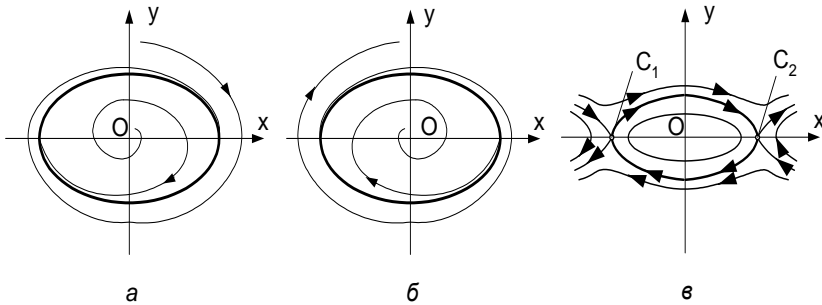


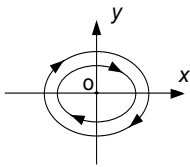
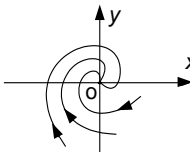
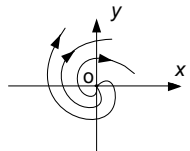
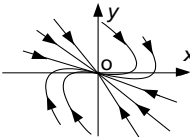
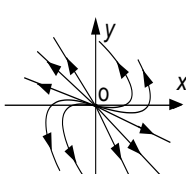
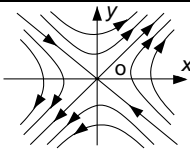
Рисунок 2.2 – Приклади граничного стійкого циклу (а), граничного нестійкого циклу (б) та сепаратиси (в)

Усі вищеописані елементи фазових портретів можуть бути одержані і побудовані шляхом розв'язання системи рівнянь (2.1), (2.2) або рівняння (2.3) з урахуванням різних початкових умов.

Зручність застосування методу фазової площини полягає передусім у тому, що, дивлячись на фазовий портрет, можна зазначити, в який стан за цілим рядом змінних система перейде в наступний момент. Завжди можна оцінити інтервали параметрів системи, при яких вона є стійкою або нестійкою.



Таблиця 2.1 – Класифікація особливих точок

	Вигляд на фазовому портреті	Назва особливої точки	Вираз перехідної характеристики
1		Центр	$x(t) = A \sin(\beta t + \varphi)$
2		Стійкий фокус	$x(t) = Ae^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)$ $\alpha > 0$
3		Нестійкий фокус	$x(t) = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)$ $\alpha > 0$
4		Стійкий вузол	$x(t) = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}$ $\alpha_1, \alpha_2 > 0$
5		Нестійкий вузол	$x(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$ $\alpha_1, \alpha_2 > 0$
6		Сідло	$x(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$ $\alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0$ або $\alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0$

Фазовий портрет, у свою чергу, є так би мовити «фронтальним зрізом» сукупності перехідних характеристик системи і в ньому, хоч і не явно (за допомогою диференціювання), закладена часова залежність зміни визначального параметра.

### 2.3 Побудова фазових портретів

Метод фазової площини належить до точних методів дослідження нелінійних систем. Найбільш повно цей метод розроблений для систем другого порядку. Сукупність фазових траєкторій (фазовий портрет), яка відповідає різним початковим положенням зображуючої точки, дає повне уявлення про динаміку нелінійної системи. Тому дослідження методом фазової площини зводиться до побудови фазового портрета та аналізу за його допомогою динамічних режимів системи. Як уже зазначалося раніше, побудову окремих фазових траєкторій можна здійснювати на основі аналітичного розв'язку рівнянь (2.1) – (2.3). Інтенсивний розвиток обчислювальної техніки зробив більш доступним метод фазової площини при розв'язанні великої кількості аналітичних задач дослідження складних нелінійних систем. Разом із тим з'явилися і методи, що вимагають менших обчислювальних затрат, на відміну від прямих (аналітичних) методів побудови фазових портретів.

Фазові траєкторії можна побудувати, не розв'язуючи диференціальних рівнянь, якщо скористатися *методом ізоклін*. *Ізокліна (лінія однакового нахилу)* – лінія, в точках якої похідна  $dx/dy$  має одне й те саме значення. Рівняння ізокліни можна знайти, розв'язавши рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{y} = C. \quad (2.4)$$

При побудові фазового портрета методом ізоклін потрібно додержуватися таких пунктів:

1. Задати початкові умови і побудувати сукупність ізоклін.

2. На ізоклінах відзначити нахил дотичних до фазових траєкторій.
3. Побудувати фазові траєкторії кусково, з урахуванням того, що фазова траєкторія є середньою лінією між двома сусідніми ізоклінами (див. рис. 2.3).

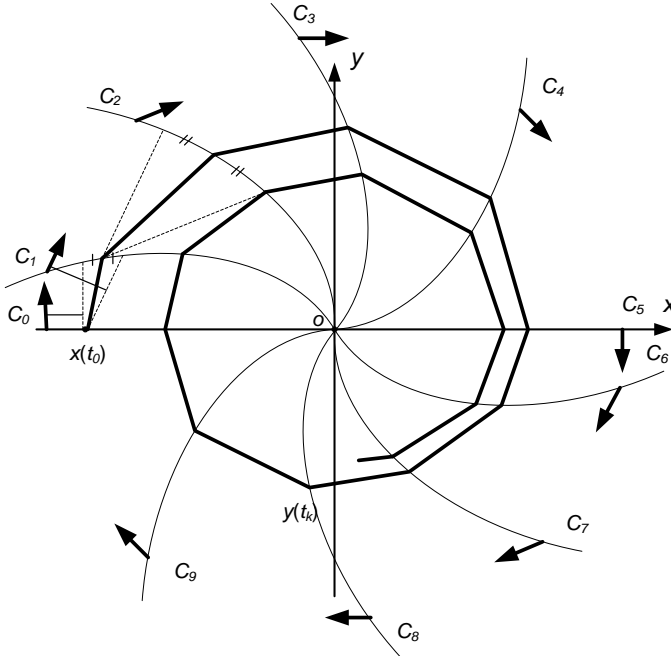


Рисунок 2.3 – Побудова фазової траєкторії методом ізоклін

#### 2.4 Аналіз прямих показників якості перехідних процесів систем за фазовими портретами

Як вже було зазначено раніше, фазовий портрет є «фронтальним зрізом» сукупності перехідних характеристик системи. Необхідно врахувати той факт, що для чисельної характеристики якості розв’язання основних задач керування нелінійними системами, а саме – підтримання вихідної змінної

системи на певному рівні чи у межах певного закону, можна використовувати все ті ж прямі показники якості регулювання, які відомі для лінійних систем. Одержання прямих показників якості для нелінійної системи можна проводити за принципом, описаним нижче.

Зіставимо сімейству точок фазової траєкторії системи, значення моментів часу, в які вона перебувала у відповідних станах. Потім розгорнемо за відповідною змінною (наприклад, за  $x$ ) у часовий графік процес переходу системи із початкового стану в кінцевий, враховуючи відповідні значення неявно заданого часу (див. рис. 2.4).

Нижня частина рис. 2.4 являє собою не що інше, як перехідну характеристику досліджуваної системи, за якою легко одержати такі прямі показники якості: перерегулювання, час наростання, максимальне значення сигналу, час досягнення першого максимуму, час перехідного процесу, ступінь загасання і т. ін. Якщо виникає необхідність оцінити час, упродовж якого система буде рухатися з одного стану (стан  $i$ ) в інший (стан  $n$ ), то це можна зробити за такою формулою:

$$t_{in} = \sum_i^n \frac{\Delta x_{i,i+1}}{\Delta y_{i,i+1}}. \quad (2.5)$$

Важливо відзначити, що формула (2.5) справедлива для випадку, якщо формалізація системи здійснювалася відповідно до виразів (2.1) і (2.2). Якщо змінні  $x$  і  $y$  пов'язані між собою не тільки через похідну, то необхідно спочатку оцінити, якому прирощенню за часом відповідають прирошення за обома змінними, а потім скорегувати вираз (2.5).

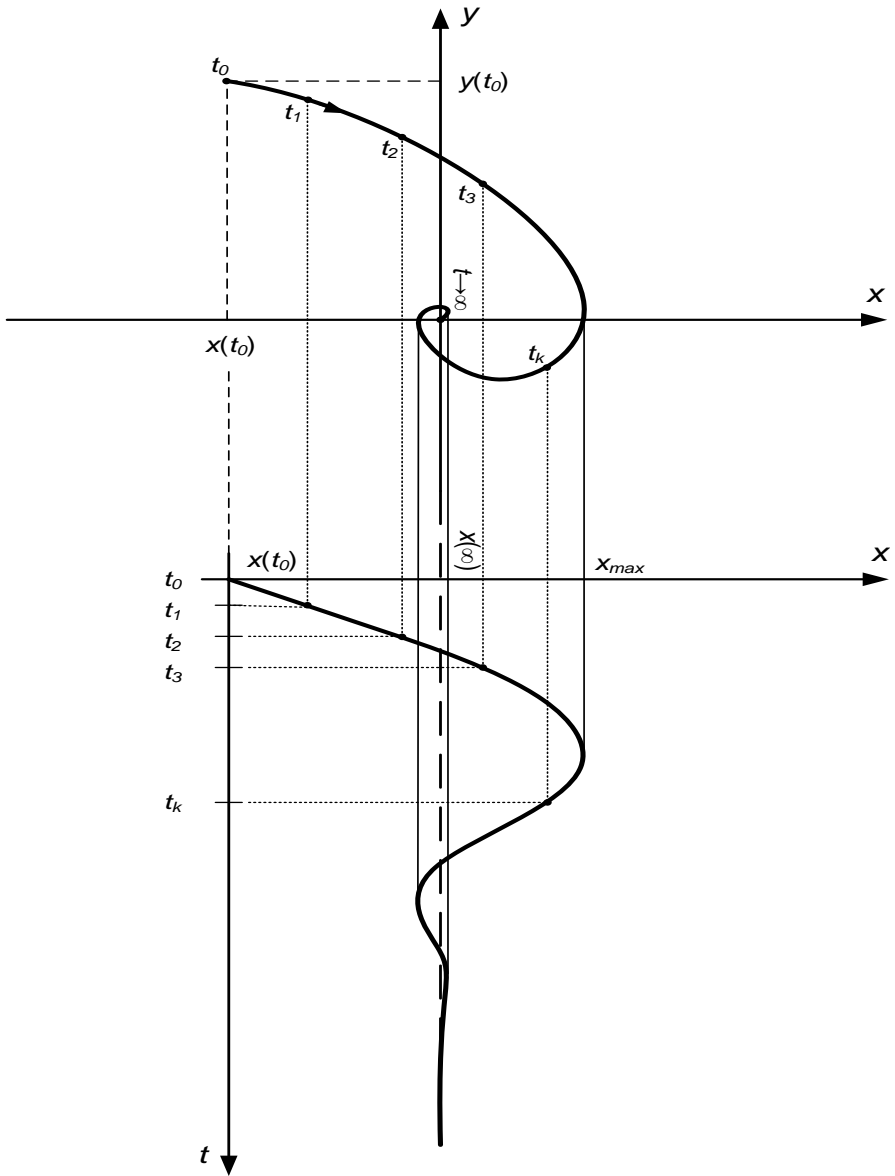


Рисунок 2.4 – Одержання графіка перехідного процесу з фазової траєкторії системи

## ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА МАТЕРІАЛОМ РОЗДІЛУ 2

**Умова.** Вільний рух матеріальної точки відбувається відповідно до рівняння  $x'' + \omega_0^2 x = 0$  ( $\omega_0 > 0$ ). Побудувати фазовий портрет динаміки даної матеріальної точки.

**Розв'язання.** Якщо за основну координату взяти змінну  $x$ , то за другу координату  $y$  зручно взяти швидкість зміни основної:  $y = dx/dt$ . У цьому випадку система рівнянь, що відповідає динаміці матеріальної точки, записана у формі Коші, буде мати вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -\omega_0^2 x. \end{cases}$$

Знаходження розв'язання записаної вище системи рівнянь зручно проводити в рамках теорії Ляпунова. Розрахунок характеристичного рівняння цієї системи диференціальних рівнянь зводимо до розрахунку визначника характеристичної матриці даної системи та прирівнювання відповідного результату до нуля:

$$\det \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega_0^2 = 0,$$

причому корені характеристичного рівняння будуть дорівнювати  $\lambda_{1,2} = \pm j \omega_0$ .

Відповідні закони зміни координат  $x$  і  $y$  матимуть вигляд

$$\begin{cases} x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ y(t) = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{x(t)}{A} = \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ \frac{y(t)}{A \omega_0} = \cos(\omega_0 t + \varphi). \end{cases}$$

Після піднесення до квадрата і додавання елементів записаної вище системи рівнянь нескладно одержати такий загальний вираз фазової траєкторії, яка відповідає руху матеріальної точки у фазовій площині:

$$\left(\frac{x(t)}{A}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{A\omega_0}\right)^2 = 1,$$

що є рівнянням еліпса і буде давати наступний фазовий портрет руху матеріальної точки, а також відповідати особливій точці під назвою «центр», яка збігатиметься із початком координат (рис. 2.5):

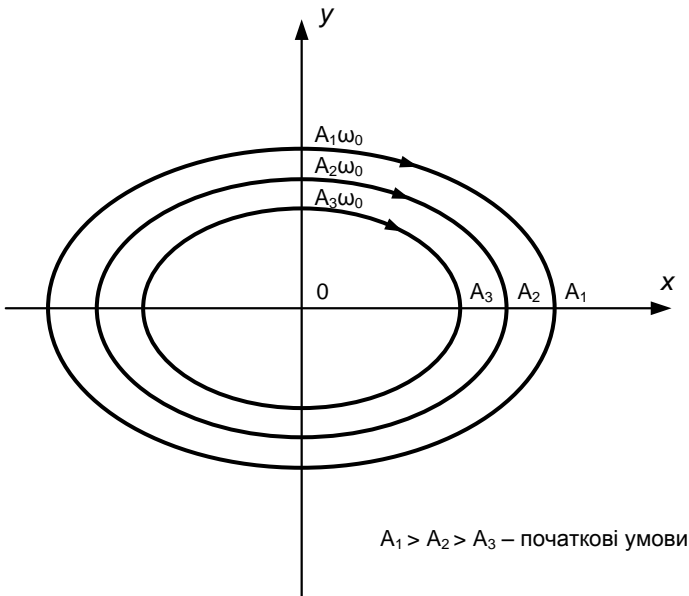


Рисунок 2.5 – Фазовий портрет руху матеріальної точки

### 3 МЕТОД ГАРМОНІЧНОЇ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ЛАНОК

На відміну від методу фазової площини, який за своєю суттю належить до точних методів дослідження нелінійних систем, метод гармонійної лінеаризації є наближеним. Метод гармонійної лінеаризації широко використовується для дослідження систем високого порядку, а також для оцінювання якості перехідних процесів. Розглянемо суть цього методу.

Нехай при проходженні гармонічного сигналу (див. рис. 3.1)  $E(t) = a \sin \omega t$  на виході нелінійної ланки формується такий періодичний сигнал :  $U(t) = \varphi(a \sin \omega t)$ .

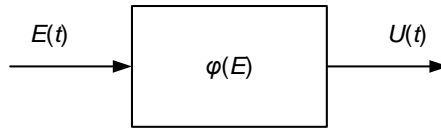


Рисунок 3.1 – Проходження сигналу через нелінійну ланку

Якщо розкласти цей сигнал у гармонічний ряд Фур'є, одержимо:

$$U(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \sin k\omega t + B_k \cos k\omega t), \quad (3.1)$$

$$\text{де } A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \omega t) d(\omega t); \quad (3.2)$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \omega t) \sin k\omega t d(\omega t); \quad (3.3)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \omega t) \cos k\omega t d(\omega t). \quad (3.4)$$

Якщо прийняти  $A_0 = 0$ , що є справедливим для більшості нелінійностей, то вираз (3.1) можна подати у вигляді

$$U(t) = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t + \text{вищі гармоніки}. \quad (3.5)$$



Нескладно показати, що:

$$\sin \omega t = \frac{E(t)}{a}; \cos \omega t = \frac{pE(t)}{a\omega} \quad (p - \text{оператор Лапласа}).$$

У цьому випадку вираз (3.5) набирає такого вигляду:

$$U(t) = \frac{A_1}{a} E(t) + \frac{B_1 p}{a\omega} E(t) + \text{вищі гармоніки}, \quad (3.6)$$

$$\text{або } U(t) = k_r E(t) + k_r' \frac{p}{\omega} E(t) + \text{вищі гармоніки}, \quad (3.7)$$

де  $k_r = \frac{A_1}{a}$ ;  $k_r' = \frac{B_1}{a}$  називаються *коефіцієнтами гармонічної лінеаризації*.

Розглянемо найпростішу нелінійну систему автоматичного управління (див. рис. 1.7) і припустимо таке:

1. У системі наявні винятково періодичні сигнали.
2. Лінійна частина системи виконує роль фільтра низьких частот, фільтруючи вищі гармоніки, які надходять до неї з виходу нелінійної ланки (гіпотеза фільтра).

Тоді вираз (3.7) можна буде переписати так:

$$U(t) = k_r E(t) + k_r' \frac{p}{\omega} E(t). \quad (3.8)$$

Нескладно показати, що надалі будь-якій нелінійній ланці можна зіставити гармонічну передаточну функцію

$$W_{\text{НЗ}}(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = k_r + k_r' \frac{p}{\omega}, \quad (3.9)$$

при цьому обов'язково пам'ятати, що вона функціональна лише за умови виконання гіпотези фільтра щодо лінійної частини та в процесі розв'язання задач завжди необхідно здійснювати відповідну перевірку.

У таблиці 3.1 як приклад наведено вже розраховані коефіцієнти гармонічної лінеаризації для деяких типових нелінійностей. Можна помітити, що для однозначних типових нелінійностей коефіцієнти  $k_r'$  дорівнюють нулю, а не дорівнюють нулю вони лише для неоднозначних нелінійностей.

Таблиця 3.1 - Коефіцієнти гармонічної лінеаризації для нелінійних ланок

Вид нелінійності ланки	Коефіцієнти гармонічної лінеаризації	
	$k_r$	$k_r'$
Характеристика із зоною нечутливості (див. рис. 1.1)	$k - \frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{c}{a} + \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right),$ при $a > c$	0
Характеристика із зоною насичення (див.рис. 1.2)	$\frac{2k}{\pi} \left( \arcsin \frac{b}{ak} + \frac{b}{ak} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2 k^2}} \right),$ при $a > b/k$	0
Релейна характеристика (див. рис. 1.3)	$\frac{4b}{\pi a}$	0
Релейна характеристика із зоною нечутливості (див. рис. 1.4)	$\frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}},$ при $a > c$	0
Характеристика з люфтом або мертвим ходом (див. рис. 1.5)	$\frac{k}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 1 - \frac{2c}{a} \right) + 2 \left( 1 - \frac{2c}{a} \right) \sqrt{\frac{c}{a} \left( 1 - \frac{c}{a} \right)} \right],$ при $a > c$	$-\frac{4kc}{\pi a} \left( 1 - \frac{c}{a} \right),$ при $a > c$

## ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА МАТЕРІАЛОМ РОЗДІЛУ 3

**Умова.** Розрахувати коефіцієнти гармонічної лінеаризації нелінійної ланки, яка має статичну характеристику виду характеристики із зоною нечутливості (див. рис. 1.1).

**Розв'язання.** Побудуємо реакцію даної нелінійної ланки на вхідний сигнал вигляду  $E(t) = a \sin \omega t$  (рис. 3.2).

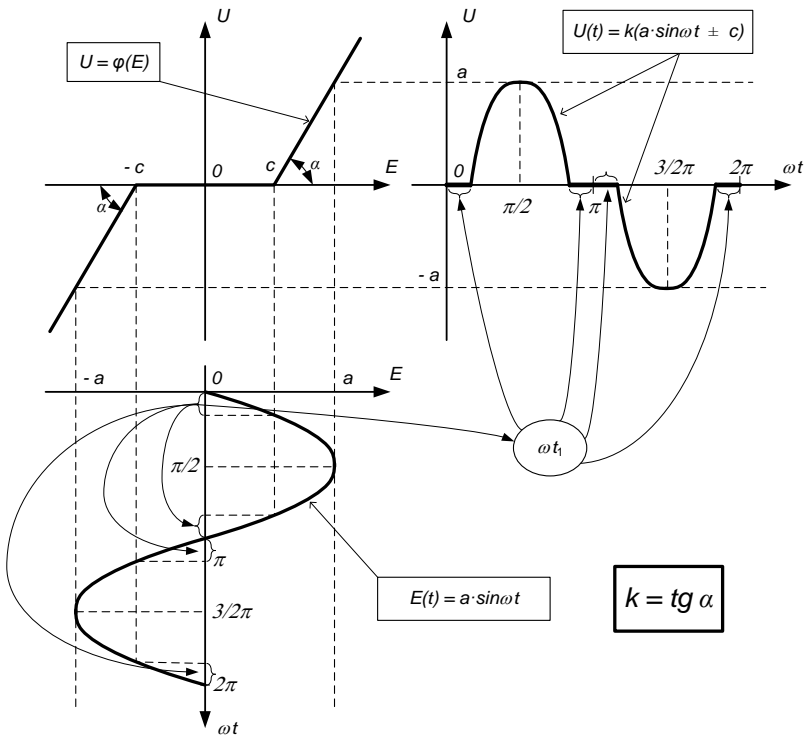


Рисунок 3.2 – Реакція нелінійної ланки на вхідний сигнал  
вигляду  $E(t) = a \sin \omega t$

Причому ненульова реакція нелінійної ланки на вхідний сигнал можлива лише в тому випадку, якщо амплітуда вхідного сигналу буде більшою від характерного значення нелінійності, тобто при  $a > c$ .

Розрахуємо коефіцієнти гармонічної лінеаризації даної нелінійної ланки за допомогою виразів (3.3) і (3.4).

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t) = \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} \varphi(a \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t) = \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} [(k(a \cdot \sin \omega t - c) \sin \omega t] d(\omega t) = \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} (ka \cdot \sin^2 \omega t) d(\omega t) - \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} (kc \cdot \sin \omega t) d(\omega t) = \\
 &= \frac{4ka}{\pi} \left[ \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) d(\omega t) - \frac{c}{a} \int_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin \omega t d(\omega t) \right] = \frac{4ka}{\pi} \left[ \frac{\omega t}{2} - \right. \\
 &\left. - \frac{\sin 2\omega t}{4} + \frac{c}{a} \cos \omega t \right] \Big|_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4ka}{\pi} \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{\omega t_1}{2} + \frac{\sin 2\omega t_1}{4} - \frac{c}{a} \cos \omega t_1 \right].
 \end{aligned}$$

Беручи до уваги, що  $\omega t_1 = \arcsin(c/a)$ , одержуємо

$$\begin{aligned}
 A_1 &= ka - \frac{2ka}{\pi} \arcsin\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{ka}{\pi} \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right) \\
 &\quad - \frac{4ka}{\pi} \frac{c}{a} \cos\left(\arcsin\left(\frac{c}{a}\right)\right) = \\
 &= ka - \frac{2ka}{\pi} \left[ \arcsin\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right]; \\
 k_r &= A_1/a = k - \frac{2k}{\pi} \left[ \arcsin\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{c}{a} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right].
 \end{aligned}$$

Аналогічними обчисленнями нескладно довести, що  $B_1 = 0$  та  $k_r' = 0$ .

## 4 ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

Нелінійні системи на відміну від лінійних можуть бути стійкими при одних режимах роботи та нестійкими при інших. Для нелінійних систем розрізняють стійкість у *малому*, у *великому* та *абсолютну стійкість*. Рух системи стійкий у *малому*, якщо умови стійкості виконуються лише в малому околі положення рівноваги, тобто при малих початкових відхиленнях. Якщо ж рух стійкий при кінцевих відхиленнях, можливих у даній системі за умовами її роботи, то його прийнято називати стійким у *великому*. Нелінійна система вважається *абсолютно* стійкою, якщо її рух стійкий при будь-яких початкових відхиленнях, тобто не залежить від них.

### 4.1 Критерій В. М. Попова

Критерій В. М. Попова визначає умови абсолютної стійкості нелінійних систем управління. *Абсолютна стійкість* означає асимптотичну стійкість нелінійної системи в цілому (щодо всього простору станів системи) за умови, що задано не конкретну нелінійність, а деякий клас нелінійностей.

Нехай є деякий клас стаціонарних нелінійностей, розташованих у секторі між лініями  $U_1 = k_1 E$  і  $U_2 = k_2 E$  (див. рис. 4.1). При цьому виконуються такі умови:

1.  $\varphi(E)$  – неперервна функція, що проходить через початок координат.
2. При  $E \neq 0$   $E \varphi(E) > 0$ .
3.  $\int_0^{\pm\infty} \varphi(E) dE = \pm\infty$ .

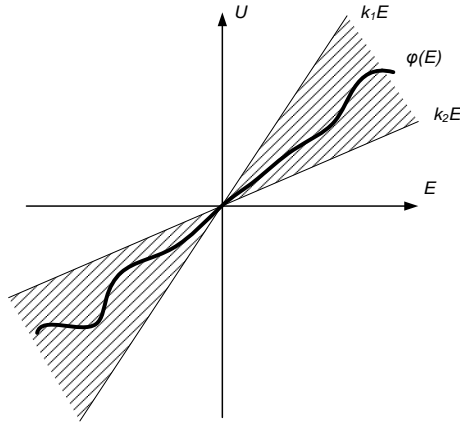


Рисунок 4.1 – Розташування нелінійності в межах класу  $[k_1, k_2]$

Абсолютна стійкість означає стійкість у цілому для всіх характеристик заданого класу. Як правило, на практиці нелінійності розташовуються в секторі  $S [0, k]$ . У цьому випадку для найпростішої нелінійної системи (див. рис. 1.7) достатньою умовою стійкості є виконання таких умов:

$$1 \operatorname{Re}[(1 + qj\omega)W_L(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0,$$

при цьому  $-\infty < q, \omega < +\infty$  та є дійсними.

2 Система, в якій  $\varphi(E) \rightarrow C \leq k$ , повинна бути стійкою.

Амплітудно-фазова частотна характеристика лінійної частини може бути подана у вигляді

$$W_L(j\omega) = U_L(\omega) + jV_L(\omega).$$

Тоді

$$\operatorname{Re}[(1 + qj\omega)(U_L(\omega) + jV_L(\omega))] =$$

$$= \operatorname{Re}[U_{\text{л}}(\omega) + qj\omega U_{\text{л}}(\omega) + jV_{\text{л}}(\omega) - q\omega V_{\text{л}}(\omega)] = U_{\text{л}}(\omega) - q\omega V_{\text{л}}(\omega).$$

У цьому випадку можна представити, що

$$[X - qY] + \frac{1}{k} > 0, \quad (4.1)$$

де  $X = U_{\text{л}}(\omega) = \operatorname{Re}[W_{\text{л}}(j\omega)]$ ;  $Y = \omega V_{\text{л}}(\omega) = \omega \operatorname{Re}[W_{\text{л}}(j\omega)]$ .

Одержане рівняння (4.1) є рівнянням так званої *прямої Попова*. *Видозміненою частотною характеристикою* (кривою Попова) називається амплітудно-фазова частотна характеристика лінійної частини системи управління, подана у вигляді виразу

$$W_{\text{л}}^*(j\omega) = U_{\text{л}}(\omega) + j\omega V_{\text{л}}(\omega). \quad (4.2)$$

Умову абсолютної стійкості можна сформулювати так: нелінійна система буде абсолютно стійкою, якщо в площині  $W_{\text{л}}^*(j\omega) = X + jY$  можна провести хоча б одну пряму Попова так, щоб крива Попова була зліва від неї (див. рис 4.2).



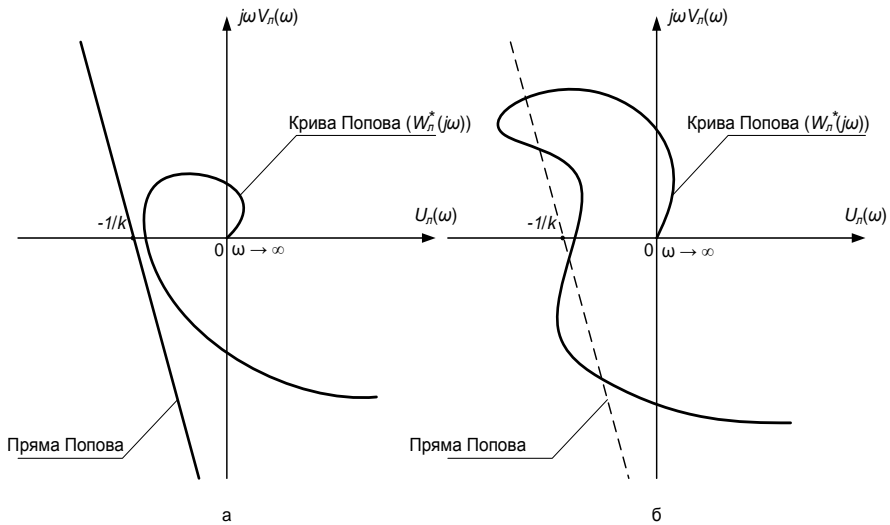


Рисунок 4.2 – Приклади виконання (а) і невиконання (б) критерію Попова щодо абсолютної стійкості нелінійної системи

## 4.2 Метод А. М. Ляпунова

Другий (прямий) метод Ляпунова базується на побудові спеціальних функцій Ляпунова, що дозволяють одержати достатні умови стійкості рівноваги у *великому*. Мають на увазі той варіант, коли всі початкові умови руху системи лежать усередині деякої замкненої області фазового простору. В його основі лежать дві теореми Ляпунова.

**Теорема 1.** Якщо існує знаковизначена функція  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , похідна якої за часом  $W(x_1, x_2, \dots, x_n) = -V(x_1, x_2, \dots, x_n)/dt$  через диференціальні рівняння руху або являє собою знакопостійну функцію, протилежну до  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  знака, або таку, що тотожно дорівнює нулю, то незбурений рух системи стійкий.

*Теорема 2.* Якщо, крім того, функція  $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$  знаковизначена, то незбурений рух стійкий асимптотично.

Відзначимо, що *знакопостійною* називають функцію, яка при всіх значеннях своїх аргументів набуває лише значення одного знака або нульове, а *знаковизначеною* – знакопостійну функцію, яка набуває нульового значення лише при нульовому значенні всіх її аргументів (у початку координат).

Усвідомити сенс функцій Ляпунова та сформульованих у теоремах умов стійкості легко за допомогою понять фазового простору. Якщо  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – знаковизначена функція, то рівняння  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C = \text{const}$ , як правило, являє у фазовому просторі  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  замкнену поверхню, що охоплює точку  $x = 0$  (початок координат). Поверхня  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1$  знаходиться всередині поверхні  $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2$ , якщо  $C_1 < C_2$ . При наближенні  $C$  до нуля поверхня стягується в точку  $x = 0$ . Якщо зважаючи на рівняння руху визначено-додатна функція  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  з часом тільки спадає, тобто  $dV(x_1, x_2, \dots, x_n)/dt$  визначено-від’ємна, то це означає, що з часом зображувальна точка переходить із зовнішніх поверхонь на внутрішні, весь час наближаючись до початку координат, який у цьому випадку є точкою асимптотично стійкої рівноваги. Описане вище нагадує, якщо порівняти зображувальну точку з точковим електричним зарядом, що вільно рухається у потенціальному полі, коли він в процесі руху переходить із еквіпотенціалей більш високого значення на еквіпотенціали значенням нижче, поступово прямуючи до точкового джерела відповідного потенціального поля. Іншою аналогією можуть бути лінії рівня (аналогія функцій Ляпунова) на топографічній карті, які дають уявлення про відповідний рельєф поверхні, а рух зображувальної точки буде нагадувати траєкторію скочування кульки, за якою ведеться спостереження згори, у гравітаційному полі уздовж відповідного рельєфу.

Задача про знаходження функцій Ляпунова, які б для цієї системи дали необхідну і достатню умову стійкості, досить складна. Залежно від конфігурації фазових траєкторій рівняння замкненої поверхні  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , яка б при всіх  $C$  перетиналася б фазовими траєкторіями лише ззовні всередину або навпаки, знайти досить важко (див. рис. 4.3).

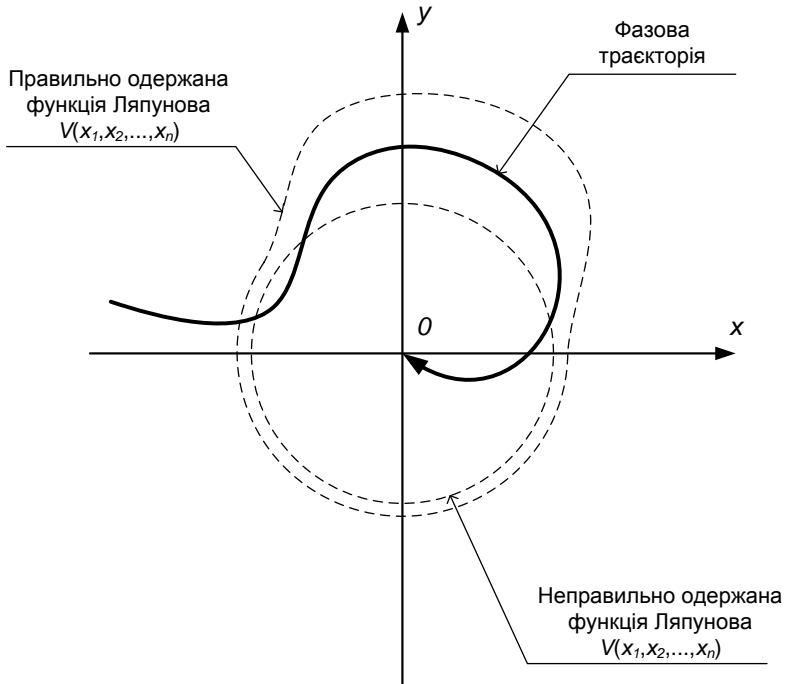


Рисунок 4.3 – Правильний та неправильний варіанти функцій Ляпунова

Тому при знаходженні функцій Ляпунова їм, як правило, заздалегідь зіставляють деяку форму, параметри якої відносно нескладно обчислити за вихідним рівнянням руху. Якщо функцію заданої форми при цьому знайти вдалося, можна легко

та з упевненістю судити про стійкість або нестійкість рівноваги на підставі наведених раніше теорем Ляпунова. Але якщо функцію заданої форми при цьому знайти не вдалося, це ще не означає, що рівновага нестійка, може просто виявитися, що функції Ляпунова даної форми не існує, але існує функція іншого вигляду.

У випадку лінійних систем функції Ляпунова часто вдається знайти у вигляді квадратичних форм, координати яких розрахувати порівняно нескладно. Якщо задатися квадратичною формою з невизначеними коефіцієнтами у вигляді

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k,l=1}^n \alpha_{k,l} x_k x_l, \quad (4.3)$$

то коефіцієнти  $\alpha_{k,l}$  можуть бути розраховані за допомогою такої умови:

$$\frac{dV(x_1, x_2, \dots, x_n)}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial V(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = - \sum_{j=1}^n A_j x_j^2, \quad (4.4)$$

де  $A_j$  – будь-які сталі, а  $dx_j/dt$  задаються на підставі вихідних рівнянь руху. Порівнюючи коефіцієнти при однакових елементах  $x_k x_l$  у лівій і правій частинах виразу (4.4), можна одержати алгебраїчні рівняння для знаходження коефіцієнтів  $\alpha_{k,l}$ .

Іноді функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми вдається відшукати і для нелінійних систем, близьких до лінійних, але в цілому таке обмеження форми різко звужує можливості дослідження. Досить істотне розширення дає функція Ляпунова, запропонована А. І. Лур'є та В. І. Постніковим. Якщо нелінійність зумовлена введенням у лінійну систему однієї безінерційної нелінійної ланки зі статичною характеристикою  $U = \varphi(E)$ , що належить класу  $[0, k]$ , то функцію Ляпунова у багатьох випадках вдається

побудувати у вигляді «квадратична форма + інтеграл нелінійності»:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = R(x) + B \int_0^E \varphi(E) dE |_{E=x}, \quad (4.5)$$

де квадратична форма задана у вигляді  $R(x) = x^* H x$ ;  $x^*$  – матриця-рядок, одержана транспонуванням вектора  $x$ ;  $H$  – квадратна визначально-додатна симетрична матриця розміру  $n \times n$ , елементи якої сталі і розглядаються як шукані невизначені коефіцієнти;  $B$  – сталий коефіцієнт інтеграла.

#### ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА МАТЕРІАЛОМ РОЗДІЛУ 4

**Умова.** Дослідити на стійкість систему, що являє собою слідкуючий електропривід, структурна схема якого має вигляд:

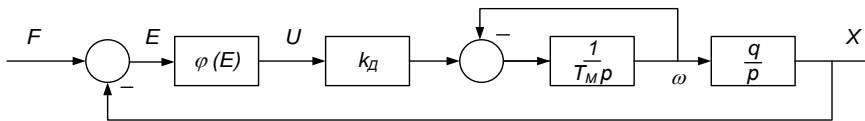


Рисунок 4.4 – Структурна схема слідкуючого електроприводу

Параметри електропривода дорівнюють:  $k_D = 1,5 \left( \frac{1}{\text{В} \cdot \text{с}} \right)$ ;  $T_M = 0,1(\text{с})$ ;  $q = 0,1$ . Характеристика  $\varphi(E)$  є непарною однозначною.

**Розв'язання на основі критерію В. М. Попова.** Якщо подати структурну схему цієї системи у вигляді, зображеному на рис. 1.7, то можна визначити передаточну функцію лінійної частини. Вона буде дорівнювати

$$W_L(p) = \frac{k_{Дq}}{p(T_M p + 1)}.$$

Розрахуємо амплітудно-фазову частотну характеристику лінійної частини даної системи:

$$W_L(j\omega) = -\frac{k_{Дq}T_M}{T_M^2\omega^2+1} - j\frac{k_{Дq}}{T_M^2\omega^3+\omega}.$$

Розрахуємо видозмінену частотну характеристику лінійної частини системи на підставі виразу (4.2):

$$W_L^*(j\omega) = U_L(\omega) + j\omega V_L(\omega) = -\frac{k_{Дq}T_M}{T_M^2\omega^2+1} - j\frac{k_{Дq}}{T_M^2\omega^2+1}.$$

Унаслідок рівності дійсної та уявної частин із точністю до постійного множника видозмінена частотна характеристика буде являти собою пряму лінію, що проходить через початок координат під кутом  $1/T_M$  (рис. 4.5).

Це означає, що дана система буде абсолютно стійкою для всіх непарних нелінійностей, що проходять через початок координат, та розташованих у першому і третьому квадрантах системи координат статичної характеристики нелінійної ланки системи, оскільки можна провести нескінченну кількість прямих Попова із характерними координатами в інтервалі від 0 до  $-\infty$ .

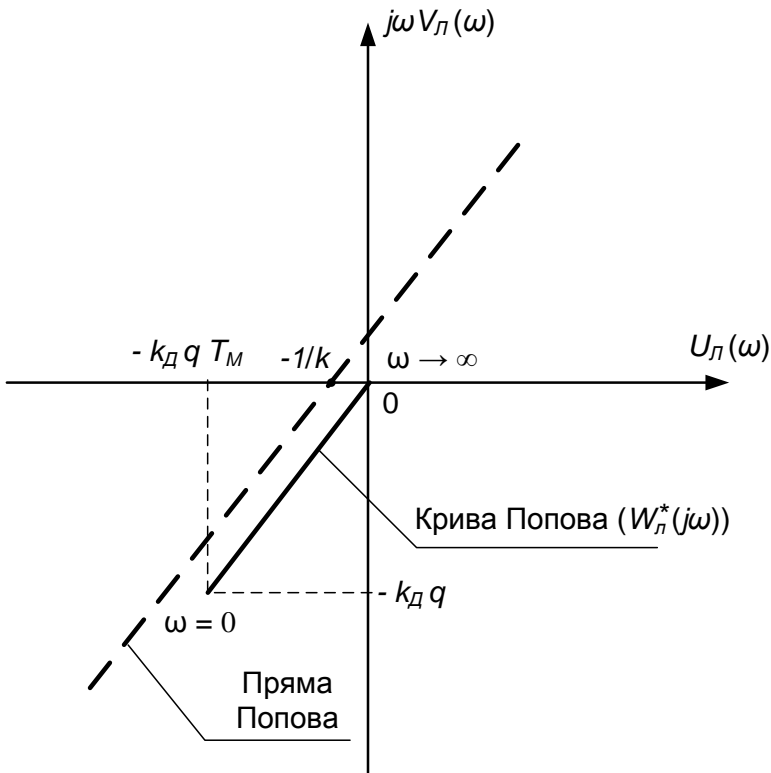


Рисунок 4.5 – Видозмінена частотна характеристика системи

**Розв’язання на основі методу А. М. Ляпунова.** Перш ніж скористатися теоремами Ляпунова для аналізу стійкості відповідної системи, одержимо вирази функцій Ляпунова у вигляді «квадратична форма + інтеграл нелінійності» (вираз (4.5)), але попередньо запишемо рівняння руху системи. Якщо взяти за основну координату вихідну змінну системи  $x$ , а другу змінну  $u$  зручно взяти як  $\omega$  (див. структурну схему до задачі), тоді перше рівняння руху буде мати вигляд

$$\frac{dx}{dt} = qu.$$

Друге рівняння можна одержати, якщо сформулювати зв'язок змінної зі змінною шляхом руху структурною схемою за рухом годинникової стрілки, через зворотний зв'язок, врахувавши, що нас цікавить вільна складова руху системи, тобто  $F = 0$ :

$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{1}{T_M}\right)y + \left(\frac{k_D}{T_M}\right)\varphi(-x),$$

або

$$\frac{dy}{dt} = -\left(\frac{1}{T_M}\right)y - \left(\frac{k_D}{T_M}\right)\varphi(x)$$

(з урахуванням непарності відповідної нелінійності).

Функція Ляпунова в першому наближенні буде мати вигляд

$$V(x, y) = \alpha_{11}x^2 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})xy + \alpha_{22}y^2 + B \int_0^x \varphi(x)dx.$$

Умова знаковизначеності вимагає виконання такої умови:

$$(\alpha_{12} + \alpha_{21}) = 0.$$

Розрахуємо повну похідну функції  $V(x, y)$ :

$$\frac{dV(x, y)}{dt} = \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dt} = [2\alpha_{11}x + B\varphi(x)] \frac{dx}{dt} + 2\alpha_{22}y \frac{dy}{dt},$$

що з урахуванням диференціальних рівнянь руху дає

$$\frac{dV(x, y)}{dt} = [2\alpha_{11}x + B\varphi(x)]qu + 2\alpha_{22}y \left[ -\left(\frac{1}{T_M}\right)y - \left(\frac{k_D}{T_M}\right)\varphi(x) \right].$$

Знову оцінюємо можливість виконання умови знаковизначеності заданої функції Ляпунова та її повної першої похідної. Ця умова буде виконуватися, якщо:



$\alpha_{11} = 0; B = 2\alpha_{22} \left( \frac{k_D}{q T_M} \right); \alpha_{22}$  – будь-яке додатне дійсне число.

Остаточно одержуємо:

$$V(x, y) = \alpha_{22} y^2 + 2\alpha_{22} \left( \frac{k_D}{q T_M} \right) \int_0^x \varphi(x) dx;$$

$$W(x, y) = \frac{dV(x, y)}{dt} = -\frac{2\alpha_{22}}{T_M} y^2,$$

причому нелінійність повинна проходити через початок координат, а також бути непарною і розміщуватися в межах першого і третього квадрантів, щоб відповідний інтеграл завжди залишався додатним.

Аналізуючи останні одержані вирази, можна зробити висновок: досліджувана система завжди буде асимптотично стійкою у *великому* відносно положення рівноваги, оскільки виконуються перша і друга теореми методу. Єдиною умовою є те, що статична характеристика відповідної нелінійної ланки повинна бути непарною, проходити через початок координат і розміщуватися в першому і третьому квадрантах відповідної системи координат.

## 5 МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЖИМУ АВТОКОЛИВАНЬ

Нелінійним системам властиве виникнення специфічних режимів функціонування, які на фазових портретах будуть проявлятися у вигляді граничних стійких циклів. Йдеться про автоколивання.

*Автоколивання* – це незгасаючі коливання в дисипативній нелінійній динамічній системі зі зворотним зв'язком, які підтримуються за рахунок енергії постійного, тобто *неперіодичного* зовнішнього впливу. Відрізняються вони від вимушених коливань тим, що останні викликані *періодичним* зовнішнім впливом та відбуваються із частотою цього впливу, в той час як виникнення автоколивань та їх частота повністю визначаються внутрішніми властивостями самої автоколивальної системи.

Ідейно методи, які будуть описані нижче, базуються на тому, що після гармонічної лінеаризації досліджувану систему можна подати у вигляді, наведеному на рис. 5.1, де  $W_{\text{Л}}(p) = R(p) / Q(p)$  – лінійна частина нелінійної системи,  $W_{\text{НЛ}}(p)$  – нелінійна частина системи після гармонічної лінеаризації, що має передаточну функцію вигляду (3.9).

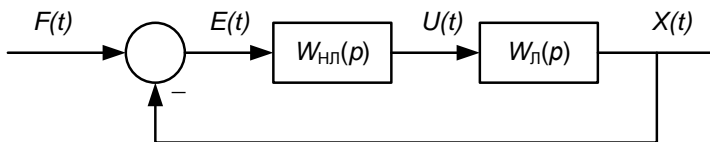


Рисунок 5.1 – Лінеаризована нелінійна система

Подальше використання, наприклад, частотного критерію стійкості Найквіста, якщо оцінювання проводити за розімкненим контуром, дає наступну умову знаходження системи управління на межі стійкості (або в умовах автоколивального режиму):

$$W_{\text{нл}}(j\omega)W_{\text{л}}(j\omega) = -1, \quad (5.1)$$

при цьому лінійна частина системи повинна бути стійкою або нейтральною, тобто поліном  $Q(p)$  не повинен мати коренів із додатною дійсною частиною, також вона повинна забезпечувати виконання гіпотези фільтра як умови гармонічної лінеаризації відповідної нелінійної ланки системи, тобто бути фільтром низьких частот.

### 5.1 Метод Л. С. Гольдфарба

За допомогою цього методу можна визначити параметри автоколивальних систем з одним нелінійним елементом, коефіцієнти гармонічної лінеаризації якого є функціями лише амплітуди. У цьому випадку рівняння (5.1) буде мати вигляд

$$W_{\text{нл}}(A)W_{\text{л}}(j\omega) = -1, \quad (5.2)$$

і розв'язується воно графічно. Якщо його подати у вигляді

$$W_{\text{л}}(j\omega) = -1/W_{\text{нл}}(A), \quad (5.3)$$

то очевидно, що для його розв'язання необхідно побудувати дві характеристики: АФЧХ лінійної частини системи  $W_{\text{л}}(j\omega)$  і від'ємну зворотну характеристику нелінійної ланки  $-1/W_{\text{нл}}(A)$ . Характеристики потрібно будувати в загальній системі координат із єдиним масштабом. Якщо побудовані криві

не перетинаються, то розв'язку рівняння (5.3) не існує і автоколивання в системі відсутні. Якщо ж криві перетинаються (див. рис. 5.2), то рівняння (5.3) має розв'язок і автоколивання можливі.

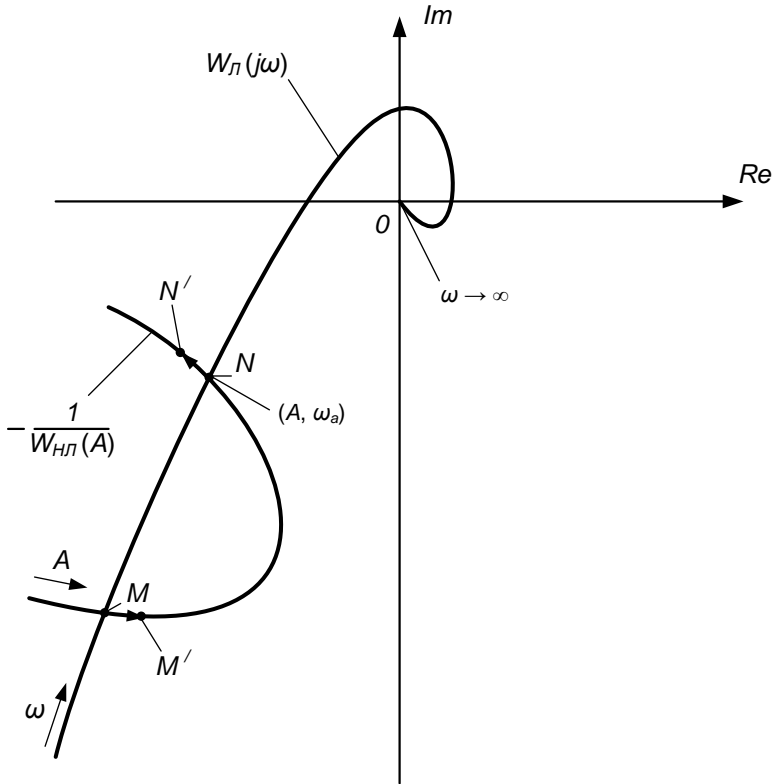


Рисунок 5.2 – Аналіз режиму автоколивань методом Л. С. Гольдфарба

Стійкість або нестійкість автоколивань можна досліджувати, аналізуючи точки перетину  $M$  і  $N$ . Цим точкам відповідають граничні цикли у фазовій площині (див. рис. 5.3).

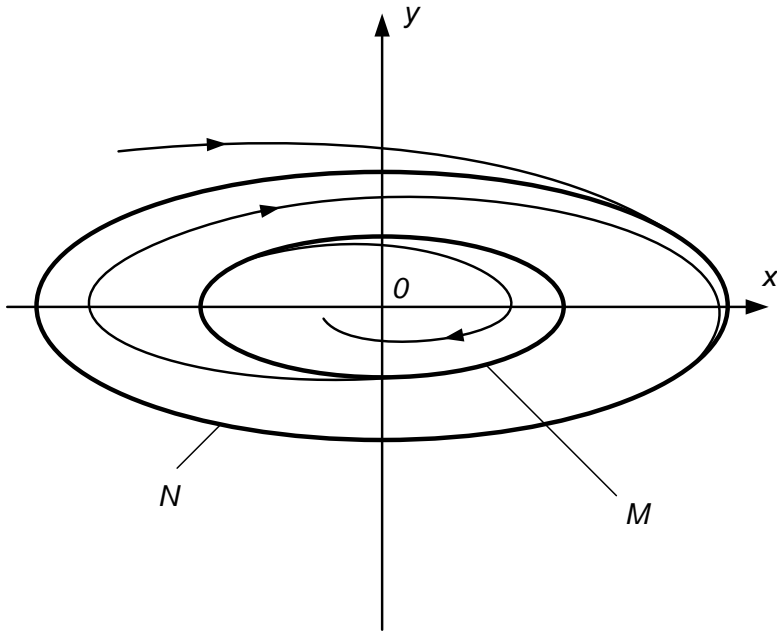


Рисунок 5.3 – Граничний стійкий (точка  $N$ ) та нестійкий (точка  $M$ ) цикли

При цьому цикл  $N$  має більшу амплітуду і є стійким, а  $M$  – меншу амплітуду і є нестійким.

Правило для оцінювання стійкості коливань можна сформулювати так: якщо точка на кривій  $-1/W_{\text{НЛ}}(A)$ , яка відповідає зростаючій амплітуді, не охоплюється АФЧХ лінійної частини системи, то коливання стійкі, а якщо охоплюється – нестійкі. На рис. 5.3 показані точки  $M$  і  $N$ , які переходять у точки  $M'$  і  $N'$  у разі зміни амплітуди в бік збільшення та в подальшому використовуються для аналізу за допомогою правила, сформульованого вище.

## 5.2 Метод Е. П. Попова

Цей метод, в основу якого покладений критерій стійкості Михайлова, дає можливість досліджувати системи з нелінійними ланками, лінеаризовані передаточні функції яких  $W_{\text{НЛ}}(j\omega, A)$  залежать не лише від амплітуди, але й від частоти. Крім того, за допомогою цього методу можна досліджувати нелінійні системи з декількома нелінійними ланками, які розділяються лінійними інерційними ланками.

Розглянемо структурну схему, наведену на рис. 5.1. Визначимо передаточну функцію замкненої системи

$$W_3(p) = \frac{\frac{R(p)}{Q(p)}W_{\text{НЛ}}(p, A)}{1 + \frac{R(p)}{Q(p)}W_{\text{НЛ}}(p, A)} = \frac{R(p)W_{\text{НЛ}}(p, A)}{Q(p) + R(p)W_{\text{НЛ}}(p, A)} \quad (5.4)$$

та запишемо характеристичний поліном

$$D(p) = Q(p) + R(p)W_{\text{НЛ}}(p, A). \quad (5.5)$$

Умова знаходження системи на межі коливальної стійкості буде мати вигляд

$$Q(j\omega) + R(j\omega)W_{\text{НЛ}}(j\omega, A) = 0. \quad (5.6)$$

Виділивши у виразі (5.6) дійсну та уявну частини, одержимо

$$X(\omega, A) + jY(\omega, A) = 0.$$

Ця рівність буде виконуватися, якщо дійсна та уявна частини одночасно будуть дорівнювати нулю, тобто

$$\begin{cases} X(\omega, A) = 0, \\ Y(\omega, A) = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Розв'язавши ці рівняння в системі, можна знайти параметри можливих автоколивань  $A$  та  $\omega_a$ , причому як амплітуда, так і частота повинні бути додатними дійсними числами. Якщо якесь значення буде від'ємним або комплексним, то автоколивання з відповідною парою значень параметрів у системі неможливі.

Перевірка стійкості автоколивань може бути проведена за допомогою такої нерівності:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial A}\right)_a \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)_a - \left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)_a \left(\frac{\partial Y}{\partial A}\right)_a > 0. \quad (5.8)$$

Тобто якщо для деякої додатної та дійсної пари параметрів  $A$  і  $\omega_a$  виконується умова (5.8), то автоколивання будуть стійкими (точка  $N$  на рис. 5.3), інакше – нестійкими (точка  $M$  на рис. 5.3).

## ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА МАТЕРІАЛОМ РОЗДІЛУ 5

**Умова.** Оцінити амплітуду і частоту автоколивань слідкуючого електропривода, структурна схема якого має вигляд (рис. 5.4):

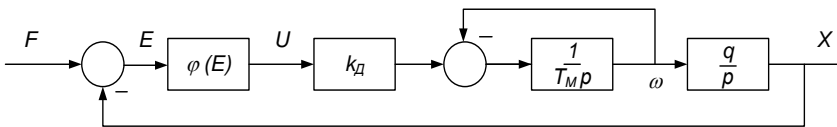


Рисунок 5.4 – Структурна схема слідкуючого електропривода

Параметри електропривода дорівнюють  $k_d = 1,5 \left(\frac{1}{\text{В}\cdot\text{с}}\right)$ ;

$T_M = 0,1(c)$ ;  $q = 0,1$ . Характеристика  $\varphi(E)$  є характеристикою реального релейного елемента зі значеннями:  $b = 100 (B)$ ;  $c = 0,25 (rad)$  (див. рис. 1.6).

**Розв'язання методом Л. С. Гольдфарба.** Після приведення системи, яка досліджується, за допомогою еквівалентних перетворень, до системи вигляду, зображеного на рис. 5.1, передаточна функція лінійної частини буде мати вигляд

$$W_L(p) = \frac{k_{\Delta q}}{p(T_M p + 1)},$$

а функція гармонічно лінеаризованого нелінійного елемента набуде вигляду

$$W_{НЛ}(A) = k_r + k_r' \frac{p}{\omega},$$

$$\text{де } k_r = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} \text{ і } k_r' = -\frac{4bc}{\pi A^2}.$$

Після підстановки  $p = j\omega$  одержимо:

$$W_{НЛ}(A) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - j \frac{4bc}{\pi A^2} = \frac{4bc}{\pi A^2} \left( \sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} - j \right).$$

Від'ємна зворотна характеристика нелінійної ланки буде дорівнювати

$$-\frac{1}{W_{НЛ}(A)} = -\frac{\pi c}{4b} \left( \sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} + j \right).$$

АФЧХ лінійної частини можна представити такою, що дорівнює

$$W_L(j\omega) = \frac{k_{\Delta q}}{j\omega(j\omega T_M + 1)},$$



$$\text{або} \quad W_L(j\omega) = -\frac{k_{dq}T_M}{T_M^2\omega^2+1} - j\frac{k_{dq}}{T_M^2\omega^3+\omega}.$$

Якщо побудувати від'ємну зворотну характеристику нелінійної ланки та АФЧХ лінійної ланки в загальній комплексній системі координат, то вони будуть розміщені одна щодо одної, як показано на рис. 5.5.

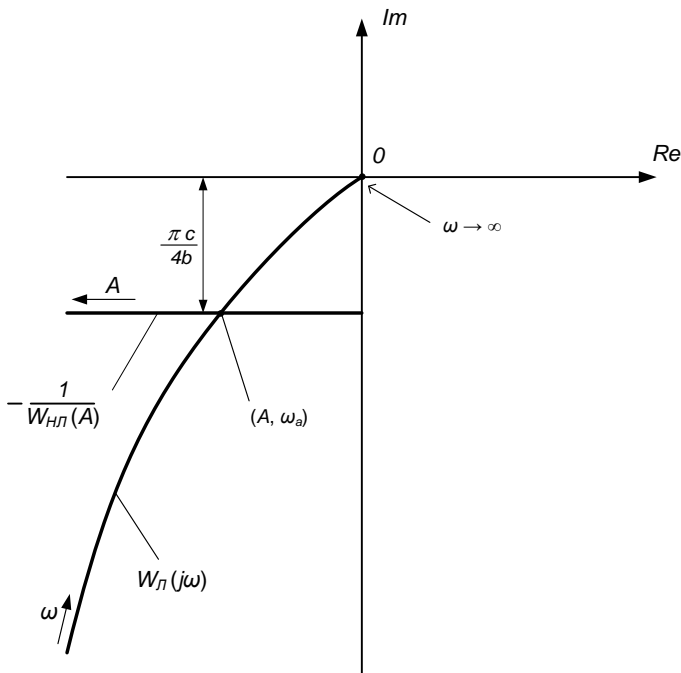


Рисунок 5.5 – Від'ємна зворотна характеристика нелінійної ланки та АФЧХ лінійної ланки в загальній комплексній системі координат

Як видно з рис. 5.5, характеристики перетинаються, що свідчить про те, що в даній системі автоколивання можливі, причому у вигляді граничного стійкого циклу.

Розрахуємо параметри можливих коливань, прирівнявши окремо дійсні та уявні складові від'ємної зворотної характеристики нелінійного ланки і АФЧХ лінійної ланки. У результаті одержуємо такі рівняння:

$$\frac{k_{\text{Д}}q}{T_M^2 \omega_a^3 + \omega_a} = \frac{\pi c}{4b},$$

$$\text{або } T_M^2 \omega_a^3 + \omega_a = \frac{k_{\text{Д}}q4b}{\pi c} \quad \text{і} \quad \frac{\pi c}{4b} \sqrt{\frac{A^2}{c^2} - 1} = \frac{k_{\text{Д}}qT_M}{T_M^2 \omega_a^2 + 1}.$$

Розв'язуючи спільно записані рівняння з урахуванням числових значень параметрів системи, одержуємо значення амплітуди і частоти можливих автоколивань:  $A = 0,51(\text{rad})$  і  $\omega_a = 18,01(\text{rad/c})$ .

**Розв'язання методом Е. П. Попова.** Запишемо передаточну функцію лінійної частини в такому вигляді:

$$W_{\text{л}}(p) = \frac{k_{\text{Д}}q}{p(T_M p + 1)} = \frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Передаточна функція гармонічно лінеаризованого нелінійного елемента буде мати вигляд

$$W_{\text{НЛ}}(A, p) = \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - \frac{4bc}{\pi A^2} \frac{p}{\omega}.$$

Характеристичний поліном системи відповідно до виразу (5.5) записується так:

$$D(p) = T_M p^2 + p + k_{\text{Д}}q \left( \frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} - \frac{4bc}{\pi A^2} \frac{p}{\omega} \right).$$

Після підстановки  $p = j\omega$  визначимо дійсну та уявну частини характеристичного полінома системи і складемо систему рівнянь у відповідності до виразу (5.7):

$$\begin{cases} X(\omega, A) = -T_M \omega^2 + \frac{4bk_D q}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{c^2}{A^2}} = 0, \\ Y(\omega, A) = \omega - \frac{4bk_D qc}{\pi A^2} = 0. \end{cases}$$

Розв'язанням записаної системи рівнянь буде додатна дійсна пара значень  $A = 0,51(rad)$  і  $\omega_a = 18,01(rad/c)$ , що свідчить про те, що в даній системі автоколивання можливі.

Досліджуємо на стійкість відповідні коливання за допомогою виразу (5.8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial A} &= \frac{4bk_D q}{\pi} \frac{2c^2 - A^2}{A^3 \sqrt{A^2 - c^2}}; & \frac{\partial X}{\partial \omega} &= -2T_M \omega; \\ \frac{\partial Y}{\partial A} &= \frac{8bk_D qc}{\pi A^3}; & \frac{\partial Y}{\partial \omega} &= 1. \end{aligned}$$

При  $A = 0,51(rad)$  і  $\omega_a = 18,01(rad/c)$  умова (5.8) виконуватиметься, що свідчить про те, що можливий автоколивальний режим буде стійким (граничний стійкий цикл на фазовому портреті).

Важливо відзначити, що незалежно від того, яким методом ми розв'язували цю задачу, обов'язково проводилася перевірка виконання гіпотези фільтра лінійною частиною, та в нашому випадку вона виконувалася.

## 6 АНАЛІЗ НЕПРЯМИХ ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ

Для оцінювання якості нелінійних САУ використовуються показники, аналогічні до показників якості лінійних САУ, тобто час перехідного процесу, перегулювання, коливальність перехідного процесу та ін. У зв'язку з тим, що стійкість нелінійних систем залежить від величини та місця прикладання зовнішнього впливу, то відповідно від зовнішнього впливу залежать і показники якості. Вочевидь, що для того щоб одержати максимально повну інформацію про якість функціонування нелінійної САУ, необхідно провести розрахунки перехідних процесів з урахуванням максимальної кількості варіантів збурювальних впливів і вхідних сигналів.

Наближену, але досить точну оцінку якості нелінійної системи без розрахунку перехідних процесів можна одержати за такою методикою. Розглянемо найпростішу нелінійну систему (див. рис. 1.7). З урахуванням гармонічної лінеаризації можна записати передаточну функцію нелінійної частини у вигляді

$$W_{\text{НЛ}}(p) = k_r(\alpha) + k_r'(\alpha) \frac{p}{\omega},$$

де  $\alpha = a/c$  – відносна амплітуда сигналу на вході нелінійної ланки;  $c$  – характерне значення на статичній характеристиці нелінійної ланки.

Коливальність гармонічно лінеаризованої системи буде дорівнювати (див. рис 6.1):

$$M = A(\omega_{\text{max}})/A(0).$$

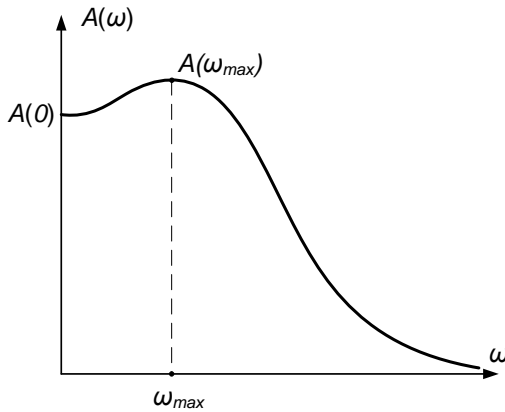


Рисунок 6.1 – Амплітудно-частотна характеристика коливальної системи

Передавальна функція лінеаризованої найпростішої нелінійної системи дорівнює

$$W_3(p) = \frac{W_L(p)W_{НЛ}(p)}{1+W_L(p)W_{НЛ}(p)}.$$

Амплітудно-фазова частотна характеристика такої системи набирає такого вигляду:

$$W_3(j\omega) = \frac{W_L(j\omega)W_{НЛ}(j\omega)}{1+W_L(j\omega)W_{НЛ}(j\omega)} = \frac{W_L(j\omega)}{1/W_{НЛ}(j\omega)+W_L(j\omega)}.$$

Уведемо поняття перетвореної амплітудно-фазової частотної характеристики (АФЧХ) нелінійної ланки системи:

$$Z(j\omega) = 1/W_{НЛ}(j\omega).$$

Тоді АФЧХ замкненої нелінійної системи можна записати у вигляді

$$W_3(j\omega) = \frac{W_L(j\omega)}{Z(j\omega)+W_L(j\omega)}.$$

Виконаємо такі підстановки:

$$\begin{cases} W_L(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \\ W_{\text{нл}}(j\omega) = W_{\text{нл}}(p)|_{p=j\omega} = k_r(\alpha) + k_r'(\alpha) \frac{p}{\omega} |_{p=j\omega} = k_r(\alpha) + jk_r'(\alpha). \end{cases} \quad (6.1)$$

У цьому випадку перетворену АФЧХ нелінійної ланки системи можна записати у вигляді

$$Z(j\omega) = 1/(k_r(\alpha) + jk_r'(\alpha)) = r(\alpha) + jr'(\alpha).$$

Показник коливальності може бути записаний так:

$$M = \left[ \frac{1}{A(0)} \right] \frac{\sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}}{\sqrt{(U(\omega) + r(\alpha))^2 + (V(\omega) + r'(\alpha))^2}},$$

$$\text{або} \quad M \cdot A(0) = \frac{\sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}}{\sqrt{(U(\omega) + r(\alpha))^2 + (V(\omega) + r'(\alpha))^2}}.$$

Подальші перетворення записаного вище виразу приводять до такої формули:

$$(U(\omega) - U_0)^2 + (V(\omega) - V_0)^2 = R^2, \quad (6.2)$$

$$\text{де } U_0 = \frac{r(\alpha)\bar{M}^2}{1 - \bar{M}^2}; \quad (6.3)$$

$$V_0 = \frac{r'(\alpha)\bar{M}^2}{1 - \bar{M}^2}; \quad (6.4)$$

$$R^2 = [r^2(\alpha) + (r'(\alpha))^2] \frac{\bar{M}^2}{(1 - \bar{M}^2)^2}; \quad (6.5)$$

$$\bar{M} = M \cdot A(0) - \text{відносна коливальність системи.}$$

Звідси випливає, що заданим постійним значенням  $M$  та  $\alpha$  в комплексній площині виразу (6.2) відповідає коло з

координатами центра  $(U_0; jV_0)$ . Якщо взяти показник коливальності незмінним ( $M = \text{const}$ ), то для різних значень відносної амплітуди можна одержати сукупність кіл, які відповідають бажаному показнику коливальності і формують *заборонену зону* (див. рис. 6.2).

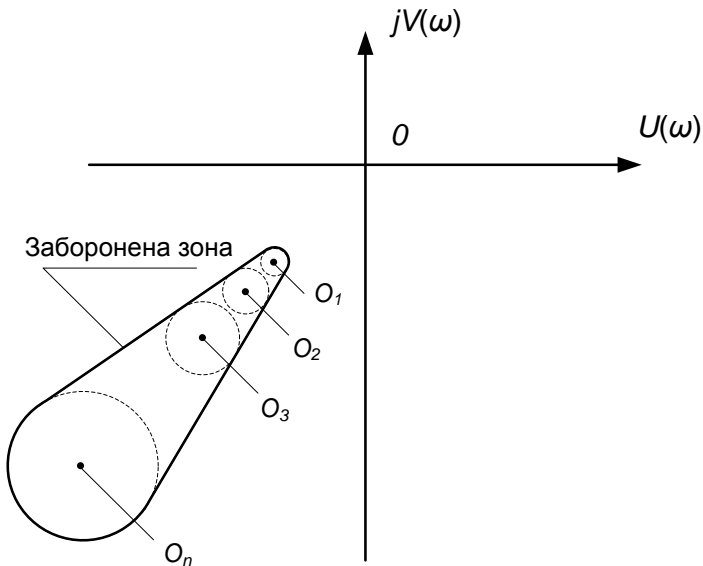


Рисунок 6.2 – Формування забороненої зони нелінійної системи

Для визначення показника коливальності необхідно в комплексній площині побудувати АФЧХ лінійної частини та заборонені зони, що відповідають різним значенням  $M$ . Показник коливальності системи визначається таким значенням забороненої зони з показником  $M$ , якої дотикається характеристика  $W_L(j\omega)$ , не заходячи в її середину.

Користуючись цим підходом, можна вирішувати не лише завдання оцінювання якості регулювання в нелінійних системах, але й завдання їх *корекції* та *синтезу*.

Завдання корекції нелінійної системи в рамках цього підходу може бути вирішене так: коли є сукупність заборонених зон, що відповідають різним  $M$  системи, можна «підігнати» АФЧХ лінійної частини під ту заборонену зону, яка відповідає найбільш бажаним показникам якості. Це робиться шляхом коригування структури лінійної частини за рахунок додаткових лінійних ланок та підбору їх параметрів, а також зміною параметрів нелінійної частини, що призводить до зміни форм відповідних заборонених зон.

Завдання синтезу в рамках цього підходу полягає в первісному формуванні структури лінійної частини таким чином, щоб її АФЧХ правильно розміщувалася щодо заборонених зон, що визначається виключно конкретними нелінійними ланками та бажаними значеннями коливальності системи. Або в первісному формуванні, на підставі виразів (6.3)–(6.5), заборонених зон такої форми та потрібних показників якості, до яких АФЧХ незмінної лінійної частини буде дотикатися, не заходячи всередину.

Усе описане вище найчастіше зручно виконувати, користуючись логарифмічним масштабом, перехід до якого нескладний, якщо пам'ятати зв'язок амплітудно-фазових частотних характеристик із логарифмічними амплітудними та фазовими частотними характеристиками.



## ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ЗА МАТЕРІАЛОМ РОЗДІЛУ 6

**Умова.** Є найпростіша нелінійна система автоматичного управління (див. рис. 1.7). Побудувати сукупність заборонених зон для даної системи зі значеннями відносної коливальності в інтервалі  $(1;2)$ , вважаючи, що нелінійна характеристика має вигляд релейної характеристики.

**Розв'язання.** Вважаючи, що гармонічно лінеаризована передаточна функція ланки з релейною характеристикою буде дорівнювати

$$W_{\text{НЛ}}(p) = \frac{4b}{\pi a},$$

запишемо вирази (6.2) – (6.5), що визначатимуть форму заборонених зон нашої нелінійної системи:

$$(U(\omega) - U_0)^2 + V^2(\omega) = R^2;$$

$$U_0 = \frac{\pi a}{4b} \frac{\bar{M}^2}{1 - \bar{M}^2}; \quad V_0 = 0; \quad R = \frac{\pi a}{4b} \frac{\bar{M}}{\bar{M}^2 - 1}.$$

Із записаних виразів видно, що заборонені зони будуть формуватися колами, загальні овідні до яких являють собою прями:

$$V(\omega) = \pm \frac{1}{\bar{M}} U(\omega).$$

Побудуємо відповідні заборонені зони в комплексній системі координат, враховуючи, що всі заборонені зони будуть розташовуватись в лівій півплощині відповідної комплексної площини внаслідок від'ємності значень величини  $U_0$  (рис. 6.3).

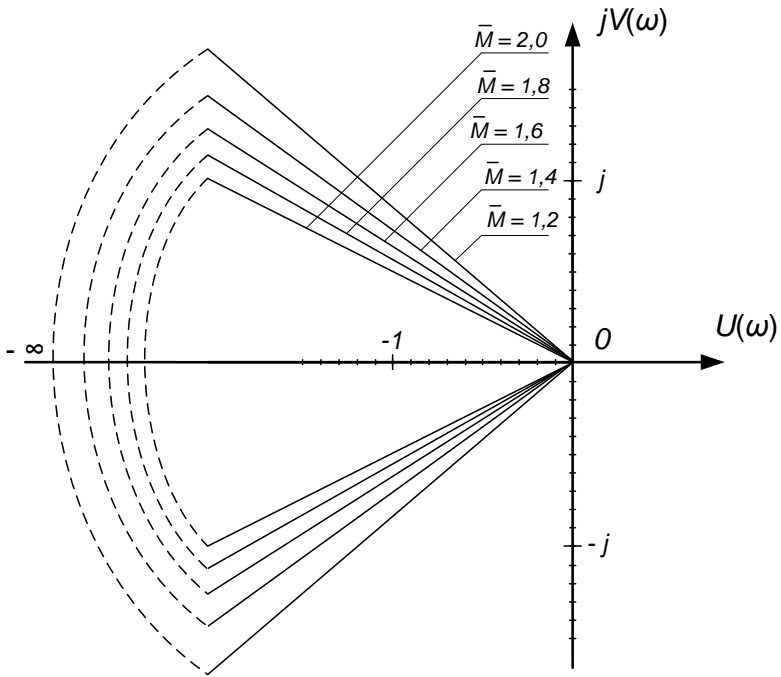


Рисунок 6.3 – Побудова заборонених зон системи в комплексній системі координат

## 7 ВІБРАЦІЙНА ЛІНЕАРИЗАЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ ЛАНОК

Метод вібраційної лінеаризації нелінійних ланок є технічним засобом для запобігання виникненню небажаних автоколивальних режимів та їх згубному впливу на систему.

Розглянемо суть цього методу на такому прикладі. Виникнення автоколивань у релейних системах пояснюється в основному тим, що в них переміщення регульовального органу відбувається з однаковою швидкістю  $V_{POmax}$  при будь-яких відхиленнях регульованої величини  $x$ , які виходять за зону нечутливості  $a$  (див. рис. 7.1).

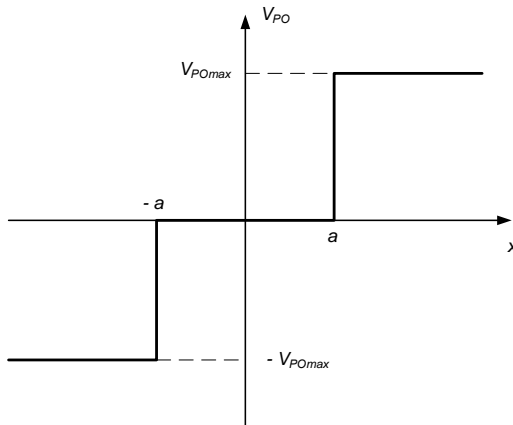


Рисунок 7.1 – Залежність швидкості регульовального органу від положення

Тому до положення рівноваги регульувальний орган підходить із досить великою швидкістю, а потім унаслідок інерції може пройти його і викликати спрацювання системи у зворотний

бік. Якщо цей процес виявиться незатухаючим, то система буде перебувати в автоколивальному режимі.

Автоколивання можна усунути за рахунок збільшення зони нечутливості  $a$  релейного елемента, що, у свою чергу, призведе до зниження точності системи, що може бути неприпустимим із точки зору її експлуатації.

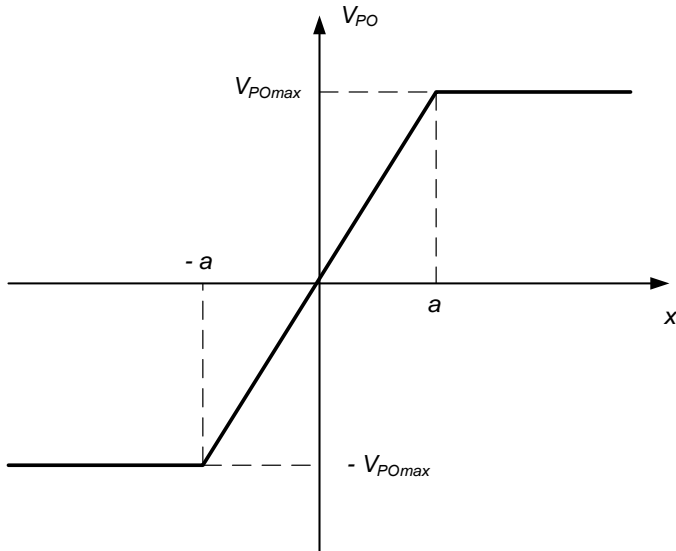


Рисунок 7.2 – Бажана залежність швидкості регулювального органу від положення

Стійкої роботи системи, не знижуючи її точності, можна досягти, якщо забезпечити лінійну або близьку до такої характеристику релейного елемента, при якій швидкість регулювального органу поблизу положення рівноваги буде пропорційною відхиленню регульованої величини (див. рис. 7.2).

Ефективним засобом зменшення впливу нелінійностей на властивості системи є накладення на основний низькочастотний

сигнал додаткового високочастотного сигналу. Такі вимушені високочастотні коливання називаються *вібраційними* і суттєво зменшують негативний вплив люфтів, зазорів, сухого тертя та інших ефектів на динаміку нелінійної системи. Важливо відзначити, що вібраційний сигнал подається виключно на вхід нелінійної ланки, як це показано на рис. 7.3.

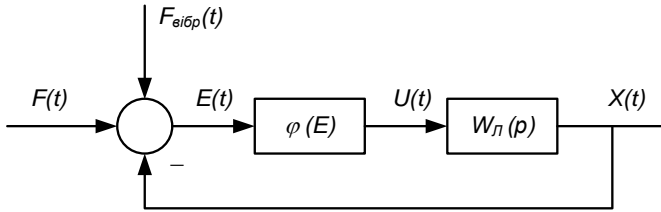


Рисунок 7.3 – Подача вібраційного сигналу в нелінійну систему

У цьому випадку на вхід нелінійної ланки діє основний сигнал  $E_0(t)$ , який відносно повільно змінюється, та додатковий високочастотний  $E_d(t)$ :

$$E(t) = E_0(t) + E_d(t) = E_0(t) + E_{dm} \sin(\omega_d t).$$

Частота  $\omega_d$  повинна бути досить високою, щоб основний сигнал  $E_0(t)$  залишався практично незмінним упродовж декількох періодів додаткового вібраційного сигналу  $E_d(t)$ , а амплітуда  $E_{dm}$  повинна бути достатньою для спрацьовування нелінійної ланки, тобто співрозмірною із характерними значеннями відповідних нелінійностей (у разі релейної характеристики із зоною нечутливості, співрозмірною із шириною зони нечутливості  $E_{dm} \sim a$ ).

Важливою умовою роботи системи в таких умовах є приглушення лінійною частиною високочастотної складової ( $\omega_d$ ) на виході нелінійної ланки, яка, крім низькочастотної складової, матиме і високочастотну (вібраційну) складову, та

більш високих гармонік, тобто (аналогічно гіпотезі фільтра у випадку гармонічної лінеаризації):

$$|W(j\omega_d)| \ll |W(j\omega_n)|,$$

де  $\omega_n$  – смуга пропускання лінійної частини.

Якщо всі описані вище умови були додержані, то нелінійна ланка фіктивно набуває нелінійного вигляду, наприклад, для випадку релейної системи, зображеного на рис. 7.4, по відношенню до лінійної частини та загальної структури системи. Це є технічною ілюстрацією принципу: «Якщо не можеш змінити щось у системі, зміни своє ставлення до неї».

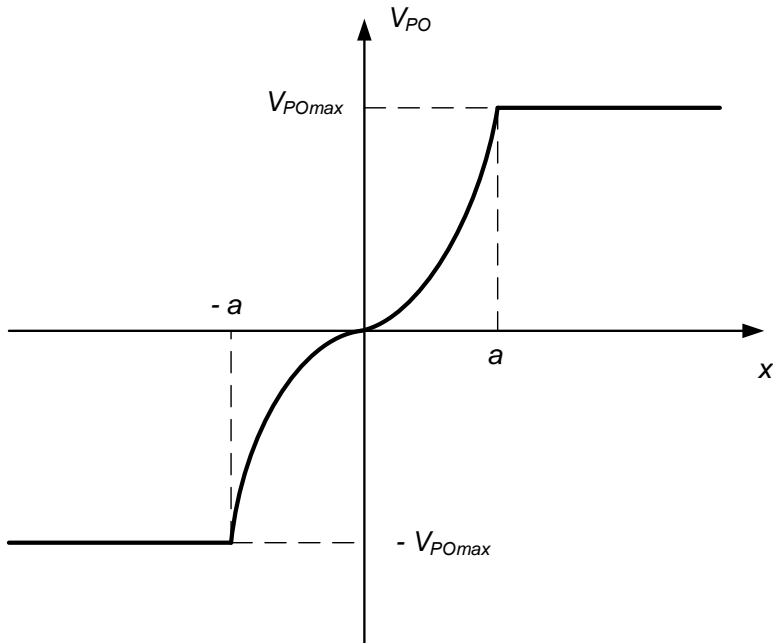


Рисунок 7.4 – Фіктивна характеристика нелінійної ланки після вібраційної лінеаризації

Як видно з рис. 7.4, фіктивна характеристика близька за властивостями до характеристики, зображеної на рис. 7.2, що дає право припустити, що в даній системі автоколивання будуть усунені.

## ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ МАТЕРІАЛІВ

1. Які системи автоматичного управління називаються нелінійними?
2. Що таке типова нелінійність?
3. Які нелінійності є однозначними?
4. Які нелінійності вважаються комбінованими?
5. Що таке неоднозначна нелінійність?
6. Перелічити основні типові нелінійності.
7. Які основні особливості структури нелінійних систем автоматичного управління ви знаєте?
8. Які основні принципи побудови математичних моделей нелінійних систем вам відомі?
9. У чому суть методу результуючих характеристик нелінійних ланок?
10. Як одержати результуючу характеристику системи послідовно з'єднаних нелінійних ланок?
11. Як одержати результуючу характеристику системи паралельно з'єднаних нелінійних ланок?
12. Як одержати результуючу характеристику системи зустрічно-паралельно з'єднаних нелінійних ланок?
13. У чому полягає основна ідея методу фазової площини?
14. Дайте визначення таких понять: фазові координати, фазова площина, фазовий простір, фазова траєкторія, фазовий портрет.
15. Перелічіть основні властивості фазових портретів.
16. Дайте визначення таких понять: особлива точка, особлива лінія.
17. Перелічіть основні особливості фазових портретів.
18. Які методи побудови фазових портретів ви знаєте?
19. Поясніть суть методу ізоклін для побудови фазових портретів.



20. Як здійснюється оцінювання прямих показників якості перехідних процесів за фазовими портретами?
21. У чому суть гармонічної лінеаризації нелінійних ланок?
22. Як здійснюється розрахунок коефіцієнтів гармонічної лінеаризації нелінійних ланок?
23. Яких важливих умов повинні дотримуватися при гармонічній лінеаризації нелінійних ланок системи?
24. Які графоаналітичні методи дослідження автоколивань у нелінійних системах ви знаєте?
25. Поясніть основні принципи методу Гольдфарба для оцінювання параметрів автоколивань у нелінійних системах.
26. Поясніть основні принципи методу Попова для оцінювання параметрів автоколивань у нелінійних системах.
27. Що таке абсолютна стійкість нелінійних систем?
28. Що таке пряма Попова?
29. Що таке крива Попова або видозмінена частотна характеристика лінійної частини?
30. У чому суть критерію Попова для оцінювання абсолютної стійкості нелінійних систем?
31. Який алгоритм дослідження абсолютної стійкості за допомогою критерію Попова?
32. У чому суть методу Ляпунова для дослідження стійкості нелінійних систем?
33. Що таке функція Ляпунова в теорії дослідження стійкості систем?
34. Поясніть поняття: знакопостійна і знаковизначена функції Ляпунова.
35. Як задаються функції Ляпунова у вигляді «квадратична форма + інтеграл нелінійності»?

36. Який принцип дослідження непрямих показників якості нелінійних систем без побудови графіків перехідних процесів?
37. Що таке заборонена зона будь-якого непрямого показника якості?
38. Як можна побудувати заборонену зону відносної коливальності нелінійної системи?
39. Як можна здійснювати синтез та корекцію параметрів нелінійних систем автоматичного управління?
40. У чому суть вібраційної лінеаризації нелінійних ланок?
41. Що таке вібраційний сигнал?
42. Яких важливих умов необхідно дотримуватися при використанні вібраційної лінеаризації нелінійних ланок?
43. У чому основні відмінності вібраційної та гармонійної лінеаризацій нелінійних ланок?

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Теорія автоматичного керування: підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук .– 2-ге вид., перероб. і доп. – К.: Либідь, 2007.– 656 с.
2. Теория автоматического управления: учеб. для ТЗЗ вузов по спец. «Автоматика и телемеханика»: в 2 ч. Ч.П. Теория нелинейных систем автоматического управления / Н. А. Бабаков, А. А. Воронов, А. А. Воронова и др.; под ред. А. А. Воронова.—2-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 1986. — 504 с.
3. Лурье Б. Я. Классические методы автоматического управления. / Б. Я. Лурье, П. Дж. Энрайт; под ред. А. А. Ланнэ.— СПб.: БХВ-Петербург, 2004.— 640 с.
4. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 5 т. Т.5. Методы современной теории автоматического управления / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. – 2-е изд., перераб. и доп.— М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.— 784 с.
5. Лукас В. А. Теория автоматического управления: учебник для вузов / В. А. Лукас. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. – 416 с.